Bu kitaba sığmayan daha neler var!

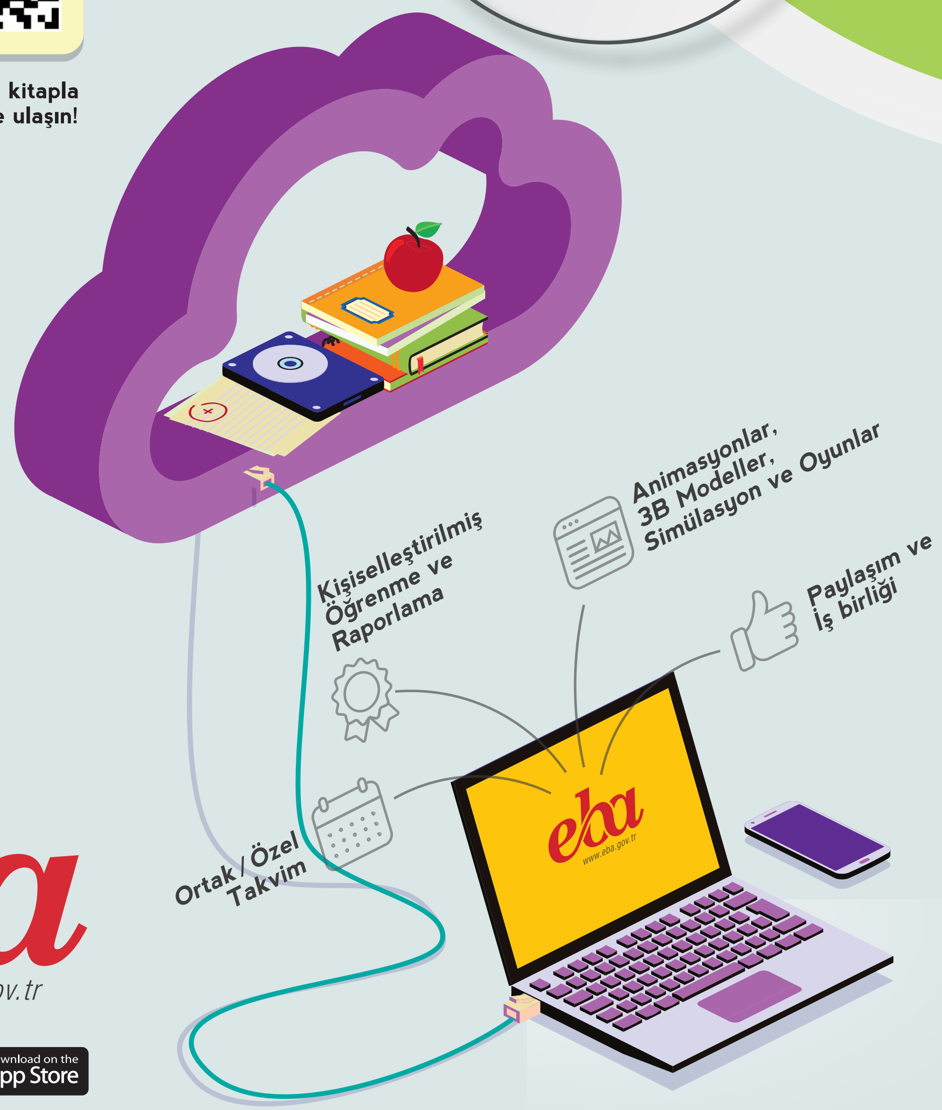
Karekodu okutun, bu kitapla ilgili EBA içeriklerine ulaşın!

ÖDS

ÖĞRENCİ/ÖĞRETMEN DESTEK SİSTEMİ

https://ods.eba.gov.tr

- Konu Anlatımlı Ders Videoları
- Soru Çözüm Videoları
- Ders Anlatım Videoları
- Çoktan Seçmeli Sorular



eba
www.eba.gov.tr

Google play · App Store

BU DERS KİTABI MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞINCA ÜCRETSİZ OLARAK VERİLMİŞTİR.
PARA İLE SATILAMAZ.

ISBN 978-975-11-6013-3

Bandrol Uygulamasına İlişkin Usul ve Esaslar Hakkında Yönetmelik'in 5'inci Maddesinin İkinci Fıkrası Çerçevesinde Bandrol Taşıması Zorunlu Değildir.

MESLEKİ EĞİTİM MERKEZLERİ
MATEMATİK DERSİ KİTABI 10

MESLEKİ EĞİTİM MERKEZLERİ

MATEMATİK 10
DERSİ KİTABI

MESLEKİ EĞİTİM MERKEZLERİ

MATEMATİK

10

DERS KİTABI

YAZARLAR

Gökhan GÜNEŞ
Melike KARABULUT
Vedat GÜLMEZ
Volkan KILIÇ

DEVLET KİTAPLARI

MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI YAYINLARI ....: 8102
YARDIMCI VE KAYNAK KİTAPLAR DİZİSİ ....: 2028

HAZIRLAYANLAR

EDİTÖR: Prof. Dr. Ali GÜVEN

DİL UZMANI: Levent BAŞARKANOĞLU

PROGRAM GELİŞTİRME UZMANI: Prof. Dr. Erdoğan TEZCİ

REHBERLİK VE GELİŞİM UZMANI: İlyas TİPİ

GÖRSEL TASARIM UZMANI: Sertan AKSAKAL

GRAFİK TASARIM UZMANI: Sertan AKSAKAL

ISBN 978-975-11-6013-3

Millî Eğitim Bakanlığı,Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığının 02.09.2021 gün ve 30652074 sayılı yazısı ile eğitim aracı olarak kabul edilmiştir.

İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl.
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl.

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,
Medeniyyet dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş, yurduma alçakları uğratma sakın;
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın;
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın.

Bastığın yerleri toprak diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki feda?
Şüheda fışkıracak toprağı sıksan, şüheda!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüda.

Ruhumun senden İlâhî, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar -ki şehadetleri dinin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,
Her cerîhamdan İlâhî, boşanıp kanlı yaşım,
Fışkırır ruh-ı mücerret gibi yerden na'şım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalan sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl;
Hakkıdır hür yaşamış bayrağımın hürriyyet;
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif Ersoy

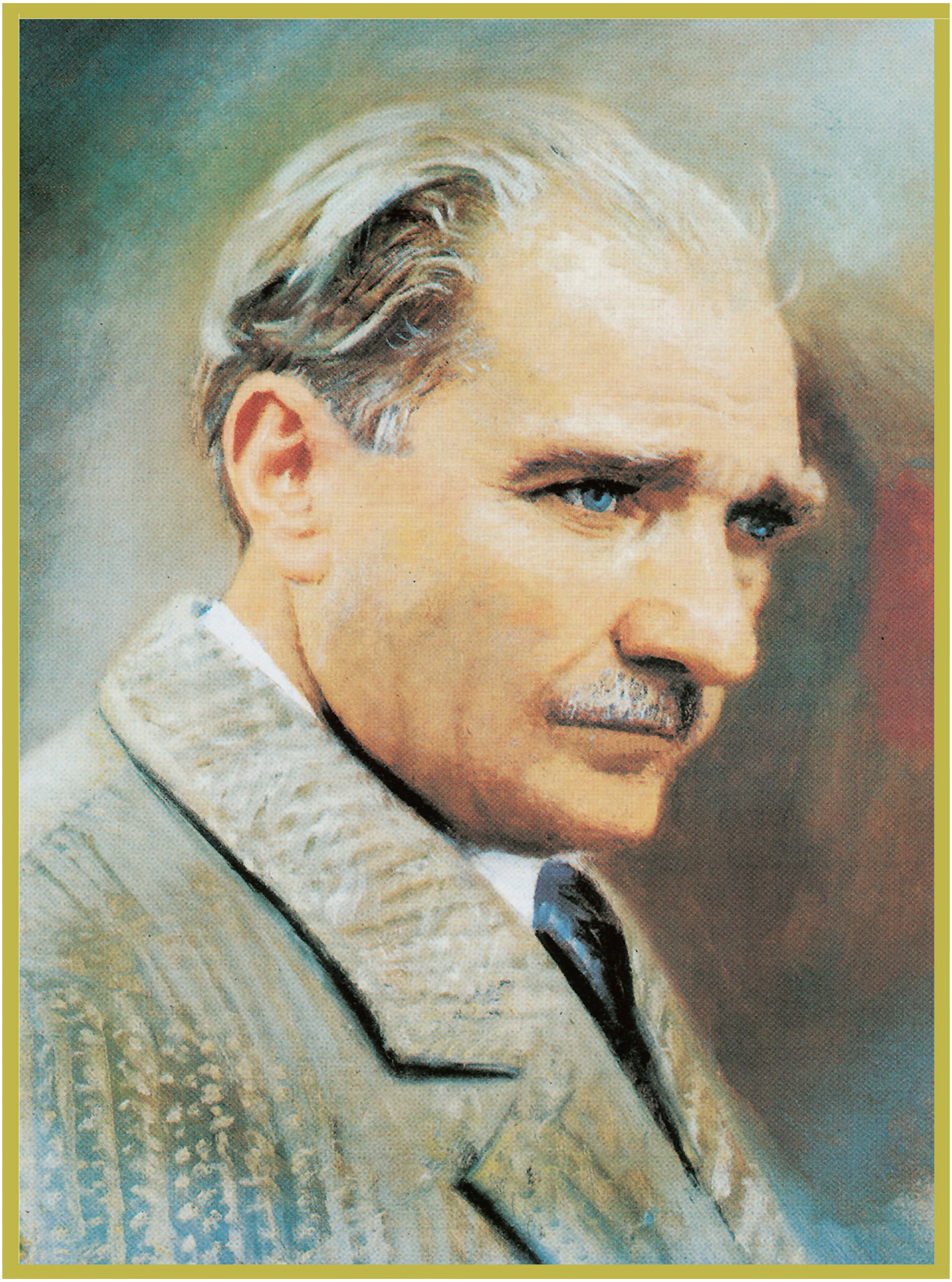
GENÇLİĞE HİTABE

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk Cumhuriyetini, ilelebet muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni bu hazineden mahrum etmek isteyecek dâhilî ve hâricî bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok namüsait bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dâhilinde iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlîlerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi vazifen, Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır. Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asil kanda mevcuttur.

Mustafa Kemal Atatürk

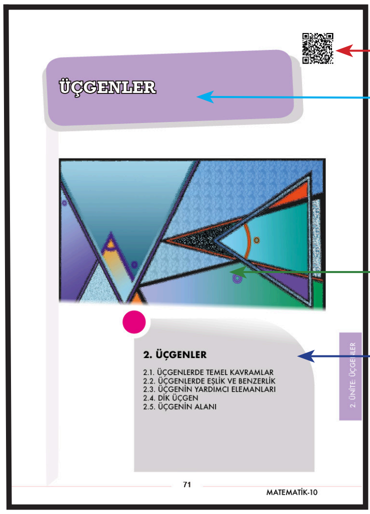


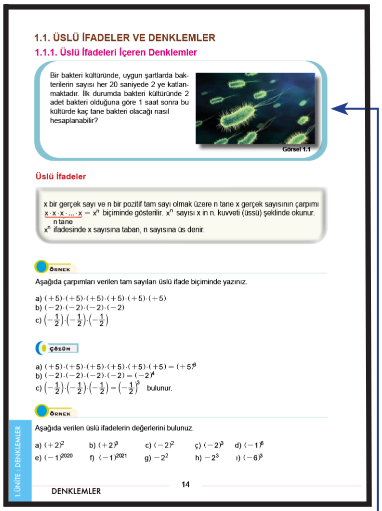
MUSTAFA KEMAL ATATÜRK

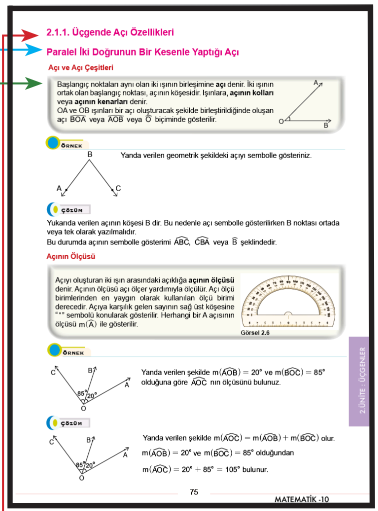
İÇİNDEKİLER

2.ÜNİTE **ÜÇGENLER**

KİTABIN TANITIMI







Ünitenin içeriklerine sahip olan karekodu gösterir.

Ünite kapağı sayfasını gösterir.

Ünitenin adını gösterir.

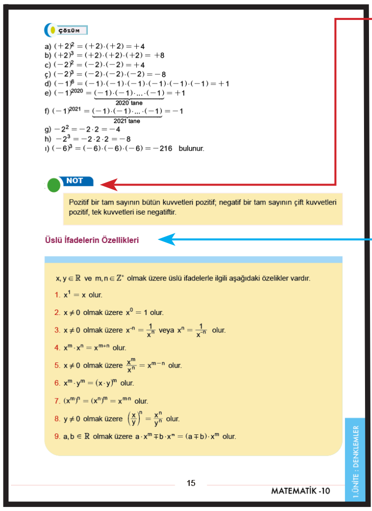
Ünite ile ilgili kazanım başlıklarını gösterir.

Ünitenin içeriğine uygun görseli gösterir.

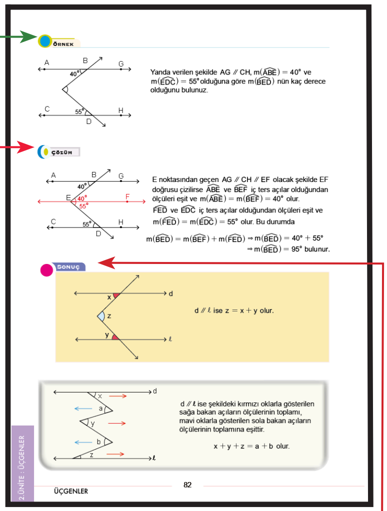
Konu ile ilgili kazanım başlıklarını gösterir.

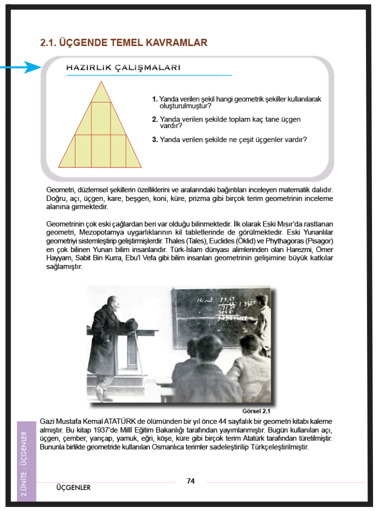
Konu ile ilgili alt başlıkları gösterir.

Konu ile ilgili tanımları gösterir.



Konu ile ilgili dikkat edilmesi gereken temel bilgileri gösterir.





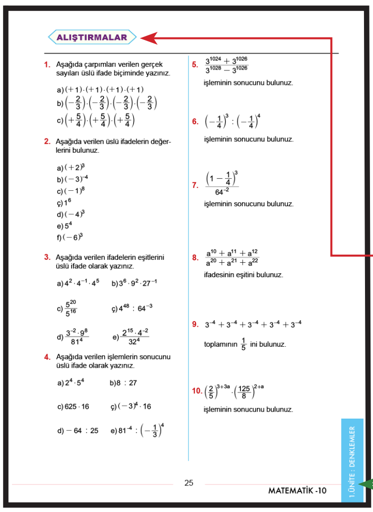
Konu ile ilgili özellikleri gösterir.

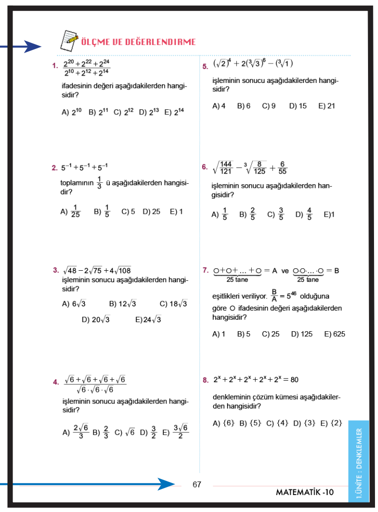
Öğrencilerin konuya hazır bulunuşluk düzeylerini ölçmeye yarayan soruları gösterir.

Örnek soru çözümü sonrası elde edilen sonuçları gösterir.

Konu ile ilgili örnek soruları gösterir.

Konu ile ilgili örnek soruların çözümlerini gösterir.





Öğrenilen konuları pekiştirme yapmayı sağlayacak soruları gösterir.

Öğrenilen konularla ilgili öğrenilen bilgileri değerlendirme amacıyla hazırlanan soruları gösterir.

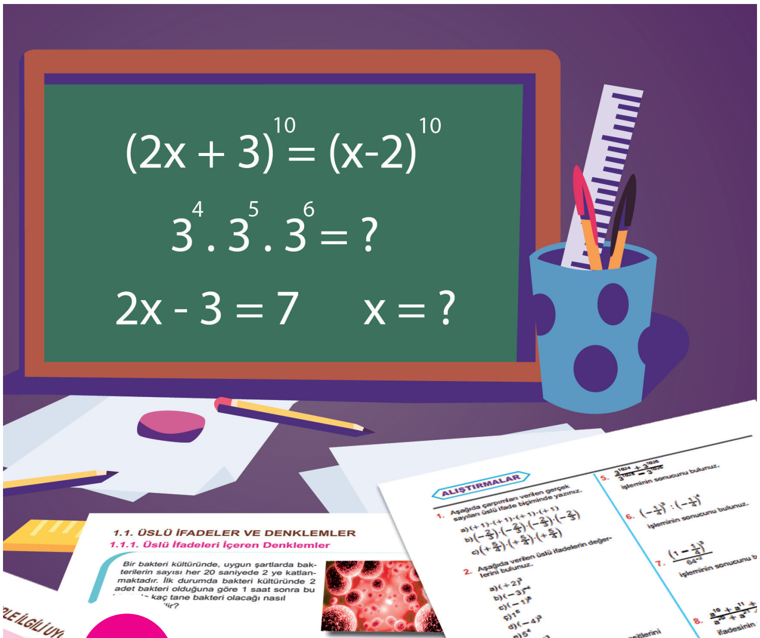
Ünite adı ve numarasını gösterir.

Sayfa numarasını gösterir.

SEMBOL VE GÖSTERİMLER

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^-$	Negatif tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Gerçek sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif gerçek sayılar kümesi
$\mathbb{R}^-$	Negatif gerçek sayılar kümesi
x^n	x in n. kuvveti
$\sqrt{}$	karekök
$\sqrt[3]{}$	küpkök
$[a,b]$	kapalı aralık
(a,b)	açık aralık
$[a,b)$	yarı açık aralık
$(-\infty,\infty)$	gerçek sayılar kümesi
$\lvert x \rvert$	x gerçek sayısının mutlak değeri
$\widehat{ABC}$	ABC üçgeni
$A(\widehat{ABC})$	ABC üçgeninin alanı
$\widehat{ABC}$	ABC açısı
$m(\widehat{ABC})$	ABC açısının ölçüsü
$d_1 \perp d_2$	d_1 doğrusu d_2 doğrusuna diktir
$d_1 \parallel d_2$	d_1 doğrusu d_2 doğrusuna paraleldir
$[AB]$	AB doğru parçası
AB	AB doğrusu
$[AB$	AB ışını
$\lvert AB \rvert$	AB doğru parçasının uzunluğu
$\cong$	Eşlik
$\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$	ABC üçgeni DEF üçgenine eştir
$\sim$	Benzerlik
$\widehat{ABC} \backsim \widehat{DEF}$	ABC üçgeni DEF üçgenine benzerdir
n_A	A açısının açıortayı
V_a	a kenarına ait kenarortay
G	Üçgenin ağırlık merkezi
h_a	a kenarına ait yükseklik
$\%$	Yüzde
$\frac{a}{b}$	a nın b ye oranı
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	Orantı

DENKLEMLER



1. DENKLEMLER

1.1. ÜSLÜ İFADELER VE DENKLEMLER

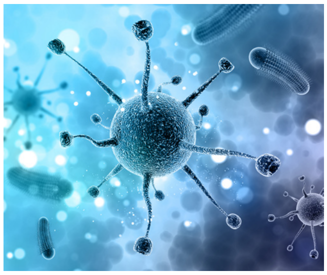
1.2. DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLERLE İLGİLİ UYGULAMALAR

1.1. ÜSLÜ İFADELER VE DENKLEMLER

1.1.1. Üslü İfadeleri İçeren Denklemler

HAZIRLIK ÇALIŞMALARI

Bir bakteri kültüründe, uygun şartlarda bakterilerin sayısı her 20 saniyede 2 ye katlanmaktadır. İlk durumda bakteri kültüründe 2 adet bakteri olduğuna göre 1 saat sonra bu kültürde kaç tane bakteri olacağı nasıl hesaplanabilir?



Görsel 1.1

Üslü İfadeler

x bir gerçek sayı ve n bir pozitif tam sayı olmak üzere n tane x gerçek sayısının çarpımı $\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot ... \cdot x}_{n \text{ tane}} = x^n$ biçiminde gösterilir. x^n sayısı x in n. kuvveti (üssü) şeklinde okunur.

x^n ifadesinde x sayısına taban, n sayısına üs denir.

ÖRNEK

Aşağıda çarpımları verilen tam sayıları üslü ifade biçiminde yazınız.

a) $(+5)\cdot(+5)\cdot(+5)\cdot(+5)\cdot(+5)\cdot(+5)$
b) $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$
c) $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

ÇÖZÜM

a) $(+5)\cdot(+5)\cdot(+5)\cdot(+5)\cdot(+5)\cdot(+5) = (+5)^6$
b) $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = (-2)^4$
c) $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3$ bulunur.

ÖRNEK

Aşağıda verilen üslü ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) $(+2)^2$ b) $(+2)^3$ c) $(-2)^2$ ç) $(-2)^3$ d) $(-1)^6$
e) $(-1)^{2020}$ f) $(-1)^{2021}$ g) -2^2 h) -2^3 ı) $(-6)^3$

ÇÖZÜM

a) $(+2)^2 = (+2)\cdot(+2) = +4$
b) $(+2)^3 = (+2)\cdot(+2)\cdot(+2) = +8$
c) $(-2)^2 = (-2)\cdot(-2) = +4$
ç) $(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8$
d) $(-1)^6 = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = +1$
e) $(-1)^{2020} = \underbrace{(-1)\cdot(-1)\cdot\ldots\cdot(-1)}_{2020 \text{ tane}} = +1$
f) $(-1)^{2021} = \underbrace{(-1)\cdot(-1)\cdot\ldots\cdot(-1)}_{2021 \text{ tane}} = -1$
g) $-2^2 = -2\cdot 2 = -4$
h) $-2^3 = -2\cdot 2\cdot 2 = -8$
ı) $(-6)^3 = (-6)\cdot(-6)\cdot(-6) = -216$ bulunur.

NOT

Pozitif bir tam sayının bütün kuvvetleri pozitif; negatif bir tam sayının çift kuvvetleri pozitif, tek kuvvetleri ise negatiftir.

Üslü İfadelerin Özellikleri

$x, y \in \mathbb{R}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere üslü ifadelerle ilgili aşağıdaki özelikler vardır.

1. $x^1 = x$ olur.
2. $x \neq 0$ olmak üzere $x^0 = 1$ olur.
3. $x \neq 0$ olmak üzere $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ veya $x^n = \dfrac{1}{x^{-n}}$ olur.
4. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ olur.
5. $x \neq 0$ olmak üzere $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ olur.
6. $x^m \cdot y^m = (x\cdot y)^m$ olur.
7. $(x^m)^n = (x^n)^m = x^{m\cdot n}$ olur.
8. $y \neq 0$ olmak üzere $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$ olur.
9. $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $a\cdot x^m \mp b\cdot x^m = (a \mp b)\cdot x^m$ olur.

ÖRNEK

$(-3)^0 + 4^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$(-3)^0 = 1,\quad 4^{-1} = \frac{1}{4},\quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{1}\right)^{2} = 3^2 = 9$ olduğundan

$(-3)^0 + 4^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 1 + \frac{1}{4} + 9 = 10 + \frac{1}{4} = \frac{41}{4}$ bulunur.

ÖRNEK

$\frac{(11^0 + 11^1)^{-1}}{3^0 + 3^{-1} + 3^{-2}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{(11^0 + 11^1)^{-1}}{3^0 + 3^{-1} + 3^{-2}} = \frac{(1+11)^{-1}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}} = \frac{12^{-1}}{\underset{(9)}{\frac{1}{1}} + \underset{(3)}{\frac{1}{3}} + \frac{1}{9}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{9+3+1}{9}}$$

$$= \frac{\frac{1}{12}}{\frac{13}{9}} = \frac{1}{12} \cdot \frac{9}{13} = \frac{9}{156} = \frac{3}{52} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$3^4 \cdot 3^5 \cdot 3^{-6}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$3^4 \cdot 3^5 \cdot 3^{-6} = 3^{4+5+(-6)} = 3^{9-6} = 3^3 = 27$ bulunur.

ÖRNEK:

$2^5 \cdot 4^2 \cdot 8^{-2}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$2^5 \cdot 4^2 \cdot 8^{-2} = 2^5 \cdot (2^2)^2 \cdot (2^3)^{-2} = 2^5 \cdot 2^4 \cdot 2^{-6} = 2^{5+4+(-6)} = 2^{9-6} = 2^3 = 8$ bulunur.

ÖRNEK

$2^{10} : 2^6$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$2^{10} : 2^6 = \frac{2^{10}}{2^6} = 2^{10-6} = 2^4 = 16$ bulunur.

ÖRNEK

$3^{24} : 27^7$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$3^{24} : 27^7 = \frac{3^{24}}{27^7} = \frac{3^{24}}{(3^3)^7} = \frac{3^{24}}{3^{21}} = 3^{24-21} = 3^3 = 27$$ bulunur.

ÖRNEK

$\dfrac{5^{-6} \cdot 25^6}{125^3}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{5^{-6} \cdot 25^6}{125^3} = \frac{5^{-6} \cdot (5^2)^6}{(5^3)^3} = \frac{5^{-6} \cdot 5^{12}}{5^9} = \frac{5^{-6+12}}{5^9} = \frac{5^6}{5^9} = 5^{-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$$ bulunur.

ÖRNEK

$\dfrac{\left(-\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}}{\frac{2^6}{3^6}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}}{\frac{2^6}{3^6}} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^6} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4+3-6} = \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{3}$$ bulunur.

ÖRNEK

Aşağıda verilen işlemlerin sonucunu üslü ifade olarak yazınız.

a) $27^5 \cdot 5^{15}$ b) $3^4 : 2^4$ c) $(-5)^3 : 27$ ç) $64^{-2} : \left(\frac{1}{3}\right)^{12}$

ÇÖZÜM

a) $27^5 \cdot 5^{15} = (3^3)^5 \cdot 5^{15} = 3^{15} \cdot 5^{15} = (3 \cdot 5)^{15} = 15^{15}$

b) $3^4 : 2^4 = \dfrac{3^4}{2^4} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^4$

c) $(-5)^3 : 27 = \dfrac{(-5)^3}{27} = \dfrac{(-5)^3}{3^3} = \left(-\dfrac{5}{3}\right)^3$

ç) $64^{-2} : \left(\dfrac{1}{3}\right)^{12} = (2^6)^{-2} : (3^{-1})^{12} = 2^{-12} : 3^{-12} = \dfrac{2^{-12}}{3^{-12}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-12} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{12}$ bulunur.

ÖRNEK

$\dfrac{2^{2020}+2^{2021}}{2^{2022}-2^{2023}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{2^{2020}+2^{2021}}{2^{2022}-2^{2023}}=\frac{2^{2020}+2^{1}\cdot 2^{2020}}{2^{2}\cdot 2^{2020}-2^{3}\cdot 2^{2020}}=\frac{\cancel{2^{2020}}(1+2)}{\cancel{2^{2020}}(2^{2}-2^{3})}=\frac{3}{4-8}=-\frac{3}{4}$$ bulunur.

ÖRNEK

$\dfrac{a^4+a^{14}+a^{24}}{a^5+a^{15}+a^{25}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{a^4+a^{14}+a^{24}}{a^5+a^{15}+a^{25}}=\frac{a^4+a^4\cdot a^{10}+a^4\cdot a^{20}}{a^5+a^5\cdot a^{10}+a^5\cdot a^{20}}=\frac{a^4\cdot\cancel{(1+a^{10}+a^{20})}}{a^5\cdot\cancel{(1+a^{10}+a^{20})}}=\frac{a^4}{a^5}=a^{4-5}=a^{-1}=\frac{1}{a}$$

bulunur.

ÖRNEK

$\dfrac{3x^4+5x^4-2x^4}{9x^4-5x^4-x^4}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{3x^4+5x^4-2x^4}{9x^4-5x^4-x^4}=\frac{(3+5-2)\cdot\cancel{x^4}}{(9-5-1)\cdot\cancel{x^4}}=\frac{6}{3}=2$$ bulunur.

ÖRNEK

$\left(\dfrac{3}{5}\right)^{3+4a}\cdot\left(\dfrac{25}{9}\right)^{2a+1}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{3+4a}\cdot\left(\frac{25}{9}\right)^{2a+1}=\left(\frac{3}{5}\right)^{3+4a}\cdot\left[\left(\frac{5}{3}\right)^{2}\right]^{2a+1}=\left(\frac{3}{5}\right)^{3+4a}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{2(2a+1)}$$

$$=\left(\frac{3}{5}\right)^{3+4a}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{4a+2}=\left[\left(\frac{5}{3}\right)^{-1}\right]^{3+4a}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{4a+2}$$

$$=\left(\frac{5}{3}\right)^{-3-4a}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{4a+2}=\left(\frac{5}{3}\right)^{-3-4a+4a+2}=\left(\frac{5}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{5}$$ bulunur.

Üslü İfade İçeren Denklemler

İçerisinde üslü ifade bulunan denklemlere **üslü denklemler** denir.

$2^x + 1 = 3$, $3^{x-1} = 9^x$, $5^{x-2} = 25$ denklemleri birer üslü denklemdir.
Üslü denklemlerin çözüm yöntemleri şu şekildedir:

- $a \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ ve $x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere

  $a^x = a^y$ ise $x = y$ olur.

- $a, b \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ ve $x \in \mathbb{Z} - \{0\}$ olmak üzere

  $a^x = b^x$ denkleminde
  ✓ x tek tam sayı ise $a = b$ olur.
  ✓ x çift tam sayı ise $|a| = |b|$ olur.

- $a^x = 1$ denkleminde

  ✓ $a \neq 0$ ise $x = 0$ olur.
  ✓ $a = 1$ ise $x \in \mathbb{R}$ olur.
  ✓ $a = -1$ ise x bir çift tam sayı olur.

ÖRNEK

$2^{x+1} = 2^{2x-1}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$2^{x+1} = 2^{2x-1} \Rightarrow x + 1 = 2x - 1$ olur. O hâlde $x + 1 = 2x - 1 \Rightarrow 1 + 1 = 2x - x$
$\Rightarrow x = 2$ olur.

Bu durumda denklemin çözüm kümesi $Ç = \{2\}$ bulunur.

ÖRNEK

$9^{12x+3} = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$9^{12x+3} = 1 \Rightarrow 9^{12x+3} = 9^0$$
$$\Rightarrow 12x + 3 = 0$$
$$\Rightarrow 12x = -3$$
$$\Rightarrow \frac{\cancel{12}x}{\cancel{12}} = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4} \text{ olur.}$$

Bu durumda denklemin çözüm kümesi $Ç = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$ bulunur.

ÖRNEK

$5^{x+2} = 125$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ olduğundan $5^{x+2} = 125 \Rightarrow 5^{x+2} = 5^3$ olur.
O hâlde $5^{x+2} = 5^3$ ise $x+2=3$ ve buradan $x = 3-2 = 1$ olur.
Bu durumda denklemin çözüm kümesi $Ç = \{1\}$ bulunur.

ÖRNEK

$5^x + 5^x + 5^x = 75$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$5^x + 5^x + 5^x = 3 \cdot 5^x$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
5^x + 5^x + 5^x = 75 &\Rightarrow 3 \cdot 5^x = 75 \\
&\Rightarrow \frac{\cancel{3} \cdot 5^x}{\cancel{3}} = \frac{75}{3} \\
&\Rightarrow 5^x = 25 \\
&\Rightarrow 5^x = 5^2 \\
&\Rightarrow x = 2 \text{ olur.}
\end{aligned}
$$

Bu durumda denklemin çözüm kümesi $Ç = \{2\}$ bulunur.

ÖRNEK

$3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 351$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$3^{x+1} = 3^x \cdot 3^1 = 3 \cdot 3^x$
$3^{x+2} = 3^x \cdot 3^2 = 9 \cdot 3^x$
$3^{x+3} = 3^x \cdot 3^3 = 27 \cdot 3^x$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 351 &\Rightarrow 3 \cdot 3^x + 9 \cdot 3^x + 27 \cdot 3^x = 351 \\
&\Rightarrow 3^x(3 + 9 + 27) = 351 \\
&\Rightarrow 3^x \cdot 39 = 351 \\
&\Rightarrow \frac{3^x \cdot \cancel{39}}{\cancel{39}} = \frac{351}{39} \\
&\Rightarrow 3^x = 9 \\
&\Rightarrow 3^x = 3^2 \\
&\Rightarrow x = 2 \text{ olur.}
\end{aligned}
$$

Bu durumda denklemin çözüm kümesi $Ç = \{2\}$ bulunur.

ÖRNEK

$16 \cdot 2^2 = (2^x)^2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$ olduğundan $16 \cdot 2^2 = (2^x)^2 \Rightarrow 2^4 \cdot 2^2 = 2^{2x}$ olur. O hâlde

$$\begin{aligned} 2^4 \cdot 2^2 = 2^{2x} &\Rightarrow 2^{4+2} = 2^{2x} \\ &\Rightarrow 2^6 = 2^{2x} \\ &\Rightarrow 2x = 6 \\ &\Rightarrow \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{6}{2} \\ &\Rightarrow x = 3 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Bu durumda denklemin çözüm kümesi $Ç = \{3\}$ bulunur.

ÖRNEK

$\left(\frac{8}{27}\right)^{-2x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\frac{8}{27} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2^3}{3^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$ olduğundan

$$\begin{aligned} \left(\frac{8}{27}\right)^{-2x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 &\Rightarrow \left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^{-2x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{-6x+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &\Rightarrow -6x + 3 = 2 \\ &\Rightarrow -6x = 2 - 3 \\ &\Rightarrow -6x = -1 \\ &\Rightarrow \frac{\cancel{-6}x}{\cancel{-6}} = \frac{-1}{-6} \\ &\Rightarrow x = \frac{1}{6} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Bu durumda denklemin çözüm kümesi $Ç = \left\{\frac{1}{6}\right\}$ bulunur.

ÖRNEK

$4^{x-1} = \frac{1}{16}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$16 = 4 \cdot 4 = 4^2$ ve $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$ olduğundan $4^{x-1} = 4^{-2}$ olur.

O hâlde $4^{x-1} = 4^{-2} \Rightarrow x - 1 = -2 \Rightarrow x = -1$ olur.

Bu durumda denklemin çözüm kümesi $Ç = \{-1\}$ bulunur.

ÖRNEK

$9^{2x} = 3^{x+2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$ olduğundan

$$\begin{aligned} 9^{2x} = 3^{x+2} &\Rightarrow (3^2)^{2x} = 3^{x+2} \\ &\Rightarrow 3^{4x} = 3^{x+2} \\ &\Rightarrow 4x = x + 2 \\ &\Rightarrow 4x - x = 2 \\ &\Rightarrow 3x = 2 \\ &\Rightarrow \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{2}{3} \\ &\Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Bu durumda denklemin çözüm kümesi $Ç = \left\{\frac{2}{3}\right\}$ bulunur.

ÖRNEK

$(2x - 1)^3 = 125$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ olduğundan $(2x - 1)^3 = 5^3$ olur. 3 sayısı bir tek tam sayı olduğundan $2x - 1 = 5$ olur.

$$\begin{aligned} 2x - 1 = 5 &\Rightarrow 2x = 5 + 1 \\ &\Rightarrow 2x = 6 \\ &\Rightarrow \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{6}{2} \\ &\Rightarrow x = 3 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Bu durumda denklemin çözüm kümesi $Ç = \{3\}$ bulunur.

ÖRNEK

$25^{3x-2} = 125^{x-4}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$ ve $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ olduğundan

$$\begin{aligned} 25^{3x-2} = 125^{x-4} &\Rightarrow (5^2)^{3x-2} = (5^3)^{x-4} \\ &\Rightarrow 5^{2(3x-2)} = 5^{3(x-4)} \\ &\Rightarrow 5^{6x-4} = 5^{3x-12} \\ &\Rightarrow 6x - 4 = 3x - 12 \\ &\Rightarrow 6x - 3x = -12 + 4 \\ &\Rightarrow 3x = -8 \\ &\Rightarrow \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = -\frac{8}{3} \\ &\Rightarrow x = -\frac{8}{3} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Bu durumda denklemin çözüm kümesi $Ç = \left\{-\frac{8}{3}\right\}$ bulunur.

ÖRNEK

$(3x + 6)^4 = 81$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ olduğundan $(3x + 6)^4 = 3^4$ olur. 4 sayısı bir çift tam sayı olduğundan $|3x+6| = 3$ olur. O hâlde

$$\begin{aligned} |3x+6| = 3 &\Rightarrow 3x+6 = 3 \text{ veya } 3x+6 = -3 \\ &\Rightarrow 3x = 3-6 \text{ veya } 3x = -3-6 \\ &\Rightarrow 3x = -3 \text{ veya } 3x = -9 \\ &\Rightarrow \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = -\frac{3}{3} \text{ veya } \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = -\frac{9}{3} \\ &\Rightarrow x = -1 \text{ veya } x = -3 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Bu durumda denklemin çözüm kümesi $Ç = \{-3, -1\}$ bulunur.

ÖRNEK

$(2x+3)^{10}=(x-2)^{10}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(2x+3)^{10}=(x-2)^{10}$ eşitliğinde üsler eşit ve 10 sayısı bir çift tam sayı olduğundan

$|2x+3|=|x-2|$ olur. O hâlde

$$
\begin{aligned}
|2x+3|=|x-2| &\Rightarrow 2x+3=x-2 \text{ veya } 2x+3=-(x-2)\\
&\Rightarrow 2x-x=-2-3 \text{ veya } 2x+3=-x+2\\
&\Rightarrow x=-5 \text{ veya } 2x+x=2-3\\
&\Rightarrow x=-5 \text{ veya } 3x=-1\\
&\Rightarrow x=-5 \text{ veya } \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}=-\frac{1}{3}\\
&\Rightarrow x=-5 \text{ veya } x=-\frac{1}{3} \text{ olur.}
\end{aligned}
$$

Bu durumda denklemin çözüm kümesi $Ç=\left\{-5,-\frac{1}{3}\right\}$ bulunur.

ÖRNEK

$(x-1)^{x+2}=1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(x-1)^{x+2}=1$ denkleminin çözümü üç aşamada yapılır.

✓ Üslü ifadenin tabanı 0 dan farklı olması durumunda üs 0 a eşit olmalıdır. $x-1\neq 0$ olduğunda üs $x+2=0$ olmalıdır. O hâlde $x+2=0\Rightarrow x=-2$ olur. Bu değer tabanda yerine yazılırsa $x=-2$ için $x-1=-2-1=-3$ sayısının sıfırdan farklı olduğu görülür. Dolayısıyla $x=-2$ olur.

✓ Üslü ifadenin tabanı 1 e eşit olmalıdır. O hâlde $x-1=1\Rightarrow x=1+1\Rightarrow x=2$ olur.

✓ Üslü ifadenin tabanı -1 e eşit olma durumunda üs çift sayı olmalıdır. $x-1=-1\Rightarrow x=-1+1\Rightarrow x=0$ olur. Bu değer üs olarak yerine yazıldığında bir çift tam sayı olmalıdır. $x=0$ için $x+2=0+2=2$ sayısı bir çift tam sayıdır. Dolayısıyla $x=0$ olur.

Bu durumda denklemin çözüm kümesi $Ç=\{-2,0,2\}$ bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıda çarpımları verilen gerçek sayıları üslü ifade biçiminde yazınız.

a) $(+1)\cdot(+1)\cdot(+1)\cdot(+1)$

b) $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$

c) $\left(+\frac{5}{4}\right)\cdot\left(+\frac{5}{4}\right)\cdot\left(+\frac{5}{4}\right)$

2. Aşağıda verilen üslü ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) $(+2)^3$

b) $(-3)^{-4}$

c) $(-1)^8$

ç) 1^6

d) $(-4)^3$

e) 5^4

f) $(-6)^3$

3. Aşağıda verilen ifadelerin eşitlerini üslü ifade olarak yazınız.

a) $4^2\cdot4^{-1}\cdot4^5$ b) $3^6\cdot9^2\cdot27^{-1}$

c) $\frac{5^{20}}{5^{16}}$ ç) $4^{48} : 64^{-3}$

d) $\frac{3^{-2}\cdot9^8}{81^4}$ e) $\frac{2^{15}\cdot4^{-2}}{32^4}$

4. Aşağıda verilen işlemlerin sonucunu üslü ifade olarak yazınız.

a) $2^4\cdot5^4$ b) $8 : 27$

c) $625\cdot16$ ç) $(-3)^4\cdot16$

d) $-64 : 25$ e) $81^{-4} : \left(-\frac{1}{3}\right)^4$

5. $\frac{3^{1024}+3^{1026}}{3^{1028}-3^{1026}}$

işleminin sonucunu bulunuz.

6. $\left(-\frac{1}{4}\right)^3 : \left(-\frac{1}{4}\right)^4$

işleminin sonucunu bulunuz.

7. $\frac{\left(1-\frac{1}{4}\right)^3}{64^{-2}}$

işleminin sonucunu bulunuz.

8. $\frac{a^{10}+a^{11}+a^{12}}{a^{20}+a^{21}+a^{22}}$

ifadesinin eşitini bulunuz.

9. $3^{-4}+3^{-4}+3^{-4}+3^{-4}+3^{-4}$ nın

$\frac{1}{5}$ ini bulunuz.

10. $\left(\frac{2}{5}\right)^{3+3a}\cdot\left(\frac{125}{8}\right)^{2+a}$

işleminin sonucunu bulunuz.

11. Aşağıda verilen denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $2^{3x+4} = 2^{2x+5}$

b) $5^{x+4} = 125^{x}$

c) $3^{2x+1} = \frac{1}{27}$

ç) $49 \cdot 7^{3} = (7^{x})^{4}$

12. $\left(\frac{81}{16}\right)^{-3x+4} = \left(\frac{9}{4}\right)^{9}$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

13. $\left(\frac{9}{49}\right)^{x-2} = \left(\frac{7}{3}\right)^{1-4x}$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

14. $\left(\frac{4}{25}\right)^{x+2} = \left(\frac{125}{8}\right)^{1-2x}$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

15. $(3x+5)^{5} = 243$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

16. $(2x-3)^{6} = 64$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

17. $2^{x+1} + 5 \cdot 2^{x+2} - 3 \cdot 2^{x} = 76$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

18. $11^{3x+33} = 1$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

19. $(3x+1)^{20} = (2x-1)^{20}$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

20. $(x-2)^{x+3} = 1$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

21. $5^{2x+1} + 5^{2x+2} + 5^{2x+3} = 775$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

22. $(x-7)^{3} = 64$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

1.1.2. Köklü İfadeleri İçeren Denklemler

Köklü İfadeler

$n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$ ve $a, x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x^n = a$ eşitliğini sağlayan x değerlerine **a nın n. kuvvetten kökü** denir ve $x = \sqrt[n]{a}$ biçiminde gösterilir.

$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x|, & n \text{ çift ise} \\ x, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

olur.

ÖRNEK

Aşağıda verilen köklü ifadelerin değerini bulunuz.

a) $\sqrt{2^2}$ b) $\sqrt{(-3)^2}$ c) $\sqrt{100}$ ç) $\sqrt[3]{4^3}$
d) $\sqrt[5]{(-8)^5}$ e) $\sqrt[3]{-1000}$ f) $\sqrt[12]{(-3)^{12}}$

ÇÖZÜM

a) $\sqrt{2^2} = |2| = 2$
b) $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$
c) $\sqrt{100} = \sqrt{10^2} = |10| = 10$
ç) $\sqrt[3]{4^3} = 4$
d) $\sqrt[5]{(-8)^5} = -8$
e) $\sqrt[3]{-1000} = \sqrt[3]{(-10)^3} = -10$
f) $\sqrt[12]{(-3)^{12}} = |-3| = 3$ bulunur.

$n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\sqrt[2n+1]{a}$ ifadesinin tanımlı olabilmesi için $a \in \mathbb{R}$, $\sqrt[2n]{a}$ ifadesinin tanımlı olabilmesi için $a \geq 0$ olmalıdır.

ÖRNEK

Aşağıdaki sayıların gerçek sayı olup olmadıklarını bulunuz.

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt[6]{5}$ c) $\sqrt[7]{-1}$ ç) $\sqrt[4]{-2}$ d) $\sqrt[3]{5}$ e) $\sqrt{-1}$

ÇÖZÜM

a) $\sqrt[n]{a}$ ifadesinde n çift iken $a \geq 0$ olmalıdır. O hâlde $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ olur.
b) $\sqrt[n]{a}$ ifadesinde n çift iken $a \geq 0$ olmalıdır. O hâlde $\sqrt[6]{5} \in \mathbb{R}$ olur.
c) $\sqrt[n]{a}$ ifadesinde n tek iken $a \in \mathbb{R}$ olmalıdır. O hâlde $\sqrt[7]{-1} \in \mathbb{R}$ olur.
ç) $\sqrt[n]{a}$ ifadesinde n çift iken $a \geq 0$ olmalıdır. O hâlde $\sqrt[4]{-2} \notin \mathbb{R}$ olur.
d) $\sqrt[n]{a}$ ifadesinde n tek iken $a \in \mathbb{R}$ olmalıdır. O hâlde $\sqrt[3]{5} \in \mathbb{R}$ olur.
e) $\sqrt[n]{a}$ ifadesinde n çift iken $a \geq 0$ olmalıdır. O hâlde $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$ olur.

ÖRNEK

$1 < x < 2$ olmak üzere

$\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt[5]{(2-x)^5} - \sqrt[10]{(x-2)^{10}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$x > 1 \Rightarrow x - 1 > 1 - 1 \Rightarrow x - 1 > 0$ olduğundan $\sqrt{(x-1)^2} = \underbrace{|x-1|}_{+} = x - 1$ olur.

$\sqrt[5]{(2-x)^5} = 2 - x$ olur.

$x < 2 \Rightarrow x - 2 < 2 - 2 \Rightarrow x - 2 < 0$ olduğundan $\sqrt[10]{(x-2)^{10}} = \underbrace{|x-2|}_{-} = -x + 2$ olur.

Bu durumda

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt[5]{(2-x)^5} - \sqrt[10]{(x-2)^{10}} &= |x-1| + (2-x) - |x-2| \\ &= x - 1 + 2 - x - (-x + 2) \\ &= x - 1 + 2 - x + x - 2 \\ &= x - 1 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < 0 < b$ olmak üzere

$\sqrt[3]{(-a)^3} + \sqrt{(b-a)^2} - \sqrt{a^2}$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\sqrt[3]{(-a)^3} = -a$ olur.

$a < 0 < b \Rightarrow a < b \Rightarrow a - a < b - a \Rightarrow 0 < b - a$ olduğundan

$\sqrt{(b-a)^2} = \underbrace{|b-a|}_{+} = b - a$ olur.

Ayrıca $a < 0$ olduğundan $\sqrt{a^2} = \underbrace{|a|}_{-} = -a$ olur.

Bu durumda

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{(-a)^3} + \sqrt{(b-a)^2} - \sqrt{a^2} &= -a + |b-a| - |a| \\ &= -a + b - a - (-a) \\ &= -a + b - a + a \\ &= b - a \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Köklü ifadeler rasyonel üslü olarak yazılabilmektedir.

$m, n \in \mathbb{Z}^{+}$, $n \geq 2$ ve $x \in \mathbb{R}^{+}$ olmak üzere $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ dir.

ÖRNEK

Aşağıda verilen köklü ifadeleri rasyonel üslü olarak yazınız.

a) $\sqrt{2^3}$ b) $\sqrt[3]{27}$ c) $\sqrt{\frac{1}{36}}$ ç) $\sqrt[4]{15}$ d) $\sqrt[5]{3^4}$ e) $\sqrt[3]{81}$ f) $\sqrt[6]{\frac{1}{243}}$

ÇÖZÜM

a) $\sqrt{2^3} = 2^{\frac{3}{2}}$

b) $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3^{\frac{3}{3}} = 3^1 = 3$

c) $\sqrt{\frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{1}{6^2}} = \sqrt{6^{-2}} = 6^{-\frac{2}{2}} = 6^{-1}$

ç) $\sqrt[4]{15} = 15^{\frac{1}{4}}$

d) $\sqrt[5]{3^4} = 3^{\frac{4}{5}}$

e) $\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4} = 3^{\frac{4}{3}}$

f) $\sqrt[6]{\frac{1}{243}} = \sqrt[6]{\frac{1}{3^5}} = \sqrt[6]{3^{-5}} = 3^{-\frac{5}{6}}$ bulunur.

ÖRNEK

$\sqrt{18}$ sayısının hangi ardışık iki tam sayı arasında olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

18 den büyük en küçük tam kare sayı 25 ve 18 den küçük en büyük tam kare sayı 16 dır. 18 sayısı da bu iki tam kare sayının arasında olmalıdır. O hâlde $16 < 18 < 25$ tir. Buradan $\sqrt{16} < \sqrt{18} < \sqrt{25}$ ve $4 < \sqrt{18} < 5$ olur. Bu durumda $\sqrt{18}$ sayısının 4 ile 5 tam sayılarının arasında olduğu bulunur.

ÖRNEK

$-\sqrt{45}$ sayısının hangi ardışık iki tam sayı arasında olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

45 ten büyük en küçük tam kare sayı 49 ve 45 ten küçük en büyük tam kare sayı 36 dır. 45 sayısı da bu iki tam kare sayının arasında olmalıdır. O hâlde $36 < 45 < 49$ tir. Buradan $\sqrt{36} < \sqrt{45} < \sqrt{49}$ ve $6 < \sqrt{45} < 7$ olur. Bu eşitsizliğin her tarafı -1 ile çarpılırsa eşitsizlik yön değiştireceğinden $-7 < -\sqrt{45} < -6$ olur. Bu durumda $-\sqrt{45}$ sayısının -7 ile -6 tam sayılarının arasında olduğu bulunur.

Köklü İfadelerin Özellikleri

1. $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$, $a \in \mathbb{R}^+$ ve $x, y, z \in \mathbb{R}$ için

$$x \cdot \sqrt[n]{a} + y \cdot \sqrt[n]{a} - z \cdot \sqrt[n]{a} = (x + y - z)\sqrt[n]{a}$$ olur.

2. $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$ ve $x, y \in \mathbb{R}^+$ için

$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$ ve $y \neq 0$ olmak üzere $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$ olur.

3. $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$ ve $x \in \mathbb{R}^+$ için

$(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$ olur.

4. $m \in \mathbb{Z}$, $n, k \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$ ve $x \in \mathbb{R}^+$ için

$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n \cdot k]{x^{m \cdot k}} = \sqrt[\frac{n}{k}]{x^{\frac{m}{k}}}$ olur.

5. $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$ ve $x, y \in \mathbb{R}^+$ için

$\sqrt[n]{x^n \cdot y} = x \cdot \sqrt[n]{y}$ olur.

ÖRNEK

Aşağıda verilen işlemlerin sonucunu bulunuz.

a) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$ b) $6\sqrt[5]{3} - 4\sqrt[5]{3}$ c) $7\sqrt[4]{10} + 5\sqrt[4]{10} - 3\sqrt[4]{10}$

ç) $5\sqrt[3]{5} + 15\sqrt[3]{5}$ d) $9\sqrt{7} - 2\sqrt{7}$ e) $8\sqrt[3]{20} + 7\sqrt[3]{20} - \sqrt[3]{20}$

ÇÖZÜM

a) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = (3 + 5)\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

b) $6\sqrt[5]{3} - 4\sqrt[5]{3} = (6 - 4)\sqrt[5]{3} = 2\sqrt[5]{3}$

c) $7\sqrt[4]{10} + 5\sqrt[4]{10} - 3\sqrt[4]{10} = (7 + 5 - 3)\sqrt[4]{10} = 9\sqrt[4]{10}$

ç) $5\sqrt[3]{5} + 15\sqrt[3]{5} = (5 + 15)\sqrt[3]{5} = 20\sqrt[3]{5}$

d) $9\sqrt{7} - 2\sqrt{7} = (9 - 2)\sqrt{7} = 7\sqrt{7}$

e) $8\sqrt[3]{20} + 7\sqrt[3]{20} - \sqrt[3]{20} = (8 + 7 - 1)\sqrt[3]{20} = 14\sqrt[3]{20}$ bulunur.

ÖRNEK

Aşağıda verilen işlemlerin sonucunu bulunuz.

a) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}$ b) $2\sqrt{3}\cdot5\sqrt{7}$ c) $3\sqrt[5]{6}\cdot\sqrt[5]{12}$

ç) $\sqrt[7]{4}\cdot\sqrt[7]{5}$ d) $2\sqrt[3]{9}\cdot3\sqrt[3]{3}$ e) $\sqrt[3]{10}\cdot5\sqrt[3]{100}$

ÇÖZÜM

a) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{5\cdot6}=\sqrt{30}$

b) $2\sqrt{3}\cdot5\sqrt{7}=(2\cdot5)\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}=(2\cdot5)\sqrt{3\cdot7}=10\sqrt{21}$

c) $3\sqrt[5]{6}\cdot\sqrt[5]{12}=3\sqrt[5]{6\cdot12}=3\sqrt[5]{72}$

ç) $\sqrt[7]{4}\cdot\sqrt[7]{5}=\sqrt[7]{4\cdot5}=\sqrt[7]{20}$

d) $2\sqrt[3]{9}\cdot3\sqrt[3]{3}=(2\cdot3)\sqrt[3]{9\cdot3}=6\sqrt[3]{27}=6\sqrt[3]{3^3}=6\cdot3=18$

e) $\sqrt[3]{10}\cdot5\sqrt[3]{100}=5\sqrt[3]{10\cdot100}=5\sqrt[3]{1000}=5\sqrt[3]{10^3}=5\cdot10=50$ bulunur.

ÖRNEK

Aşağıda verilen işlemlerin sonucunu bulunuz.

a) $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}}$ b) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{\sqrt{45}}{3}$ ç) $\dfrac{\sqrt{160}}{\sqrt{20}}$ d) $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$ e) $\dfrac{\sqrt[3]{243}}{3}$ f) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}$

ÇÖZÜM

a) $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}}=\sqrt{\dfrac{32}{8}}=\sqrt{4}=2$

b) $2^2=4$ olduğundan $\sqrt{4}=2$ dir. $\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{4}{2}}=\sqrt{2}$

c) $3^2=9$ olduğundan $\sqrt{9}=3$ tür. $\dfrac{\sqrt{45}}{3}=\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{9}}=\sqrt{\dfrac{45}{9}}=\sqrt{5}$

ç) $\dfrac{\sqrt{160}}{\sqrt{20}}=\sqrt{\dfrac{160}{20}}=\sqrt{8}=\sqrt{4\cdot2}=\sqrt{2^2\cdot2}=2\sqrt{2}$

d) $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{\dfrac{32}{2}}=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$

e) $3^3=27$ olduğundan $\sqrt[3]{27}=3$ tür. $\dfrac{\sqrt[3]{243}}{3}=\dfrac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{27}}=\sqrt[3]{\dfrac{243}{27}}=\sqrt[3]{9}$

f) $2^3=8$ olduğundan $\sqrt[3]{8}=2$ dir. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}=\dfrac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\dfrac{8}{2}}=\sqrt[3]{4}$ bulunur.

ÖRNEK

$\dfrac{\sqrt{11}+\sqrt{11}+\sqrt{11}+\sqrt{11}+\sqrt{11}}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{11}\cdot\sqrt{11}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{\sqrt{11}+\sqrt{11}+\sqrt{11}+\sqrt{11}+\sqrt{11}}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{11}\cdot\sqrt{11}}=\frac{(1+1+1+1+1)\sqrt{11}}{\underbrace{\sqrt{11}\cdot\sqrt{11}}_{11}\cdot\sqrt{11}}$$

$$=\frac{5\cancel{\sqrt{11}}}{11\cancel{\sqrt{11}}}=\frac{5}{11}\text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\sqrt{\dfrac{81}{36}}+\sqrt[3]{\dfrac{64}{216}}-\dfrac{5}{6}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\sqrt{\frac{81}{36}}+\sqrt[3]{\frac{64}{216}}-\frac{5}{6}=\sqrt{\left(\frac{9}{6}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{4}{6}\right)^3}-\frac{5}{6}$$

$$=\frac{9}{6}+\frac{4}{6}-\frac{5}{6}$$

$$=\frac{9+4-5}{6}$$

$$=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}\text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$5\sqrt{50}+4\sqrt{8}-\sqrt{32}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$5\sqrt{50}+4\sqrt{8}-\sqrt{32}=5\sqrt{25\cdot 2}+4\sqrt{4\cdot 2}-\sqrt{16\cdot 2}$$

$$=5\sqrt{5^2\cdot 2}+4\sqrt{2^2\cdot 2}-\sqrt{4^2\cdot 2}$$

$$=5\cdot 5\sqrt{2}+4\cdot 2\sqrt{2}-4\sqrt{2}$$

$$=25\sqrt{2}+8\sqrt{2}-4\sqrt{2}$$

$$=(25+8-4)\sqrt{2}$$

$$=29\sqrt{2}\text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

Aşağıda verilen işlemlerin sonucunu bulunuz.

a) $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{54}$

b) $\dfrac{6\sqrt{75}+7\sqrt{27}-\sqrt{108}}{3\sqrt{48}-\sqrt{12}}$

ÇÖZÜM

a) $$\begin{aligned}\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{54} &= \sqrt[3]{8\cdot 2}+\sqrt[3]{125\cdot 2}-\sqrt[3]{27\cdot 2}\\ &= \sqrt[3]{2^3\cdot 2}+\sqrt[3]{5^3\cdot 2}-\sqrt[3]{3^3\cdot 2}\\ &= 2\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}\\ &= (2+5-3)\sqrt[3]{2}\\ &= 4\sqrt[3]{2}\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}\frac{6\sqrt{75}+7\sqrt{27}-\sqrt{108}}{3\sqrt{48}-\sqrt{12}} &= \frac{6\sqrt{25\cdot 3}+7\sqrt{9\cdot 3}-\sqrt{36\cdot 3}}{3\sqrt{16\cdot 3}-\sqrt{4\cdot 3}}\\ &= \frac{6\sqrt{5^2\cdot 3}+7\sqrt{3^2\cdot 3}-\sqrt{6^2\cdot 3}}{3\sqrt{4^2\cdot 3}-\sqrt{2^2\cdot 3}}\\ &= \frac{6\cdot 5\sqrt{3}+7\cdot 3\sqrt{3}-6\sqrt{3}}{3\cdot 4\sqrt{3}-2\sqrt{3}}\\ &= \frac{30\sqrt{3}+21\sqrt{3}-6\sqrt{3}}{12\sqrt{3}-2\sqrt{3}}\\ &= \frac{(30+21-6)\sqrt{3}}{(12-2)\sqrt{3}}\\ &= \frac{45\cancel{\sqrt{3}}}{10\cancel{\sqrt{3}}}\\ &= \frac{45}{10}=\frac{9}{2}\text{ bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK

$(\sqrt{3})^4+2(\sqrt[3]{2})^6-(\sqrt[3]{5})^9$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}(\sqrt{3})^4+2(\sqrt[3]{2})^6-(\sqrt[3]{5})^9 &= \sqrt{3^4}+2\sqrt[3]{2^6}-\sqrt[3]{5^9}\\ &= 3^{\frac{4}{2}}+2\cdot 2^{\frac{6}{3}}-5^{\frac{9}{3}}\\ &= 3^2+2\cdot 2^2-5^3\\ &= 9+8-125\\ &= 17-125\\ &= -108\text{ bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK

$\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[5]{16}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Kök dereceleri farklı olan ifadeleri çarpmak için kök dereceleri eşitlenmelidir.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[5]{16} &= \sqrt[3]{2^2}\cdot\sqrt[5]{2^4} = \sqrt[5\cdot3]{2^{5\cdot2}}\cdot\sqrt[3\cdot5]{2^{3\cdot4}}\\ &= \sqrt[15]{2^{10}}\cdot\sqrt[15]{2^{12}} = \sqrt[15]{2^{10}\cdot2^{12}}\\ &= \sqrt[15]{2^{10+12}} = \sqrt[15]{2^{22}} = \sqrt[15]{2^{15+7}}\\ &= \sqrt[15]{2^{15}\cdot2^{7}} = 2\sqrt[15]{2^7}\ \text{bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK

$\dfrac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[4]{8}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Kök dereceleri farklı olan ifadeleri bölmek için kök dereceleri eşitlenmelidir.

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[4]{8}} &= \frac{\sqrt[3]{2^5}}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{\sqrt[4\cdot3]{2^{4\cdot5}}}{\sqrt[3\cdot4]{2^{3\cdot3}}} = \frac{\sqrt[12]{2^{20}}}{\sqrt[12]{2^9}}\\ &= \sqrt[12]{\frac{2^{20}}{2^9}} = \sqrt[12]{2^{11}}\ \text{bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK

$\dfrac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[6]{32}}{\sqrt[3]{4}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[6]{32}}{\sqrt[3]{4}} &= \frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[6]{2^5}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3\cdot4]{2^{3\cdot1}}\cdot\sqrt[2\cdot6]{2^{2\cdot5}}}{\sqrt[4\cdot3]{2^{4\cdot2}}}\\ &= \frac{\sqrt[12]{2^3}\cdot\sqrt[12]{2^{10}}}{\sqrt[12]{2^8}} = \sqrt[12]{\frac{2^3\cdot2^{10}}{2^8}}\\ &= \sqrt[12]{2^{3+10-8}} = \sqrt[12]{2^5}\ \text{bulunur.}\end{aligned}$$

$x, y \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

- $(\sqrt{x}+\sqrt{y})\cdot(\sqrt{x}-\sqrt{y}) = x - y$ olduğundan $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ ile $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ çarpımı bir rasyonel sayıdır.
- $\sqrt{x}.\sqrt{x} = x$ olduğundan $\sqrt{x}$ ile $\sqrt{x}$ çarpımı bir rasyonel sayıdır.

ÖRNEK

Aşağıda verilen işlemlerin sonucunu bulunuz.

a) $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

ÇÖZÜM

a) $\underset{(\sqrt{2})}{\dfrac{4}{\sqrt{2}}} = \dfrac{4\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ bulunur.

b) $\underset{(\sqrt[3]{2^2})}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}} = \dfrac{1\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$ bulunur.

c) $\underset{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}} = \dfrac{1\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$ bulunur.

ÖRNEK

$\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{2}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\underset{(\sqrt{2}+1)}{\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}} - \sqrt{2} = \dfrac{1\cdot(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{2}+1)} - \sqrt{2}$$

$$= \dfrac{\sqrt{2}+1}{2-1} - \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{2}+1-\sqrt{2}$$

$$= 1 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\sqrt[3]{3^{2x-1}} = \sqrt[4]{3^{x+2}}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Köklü ifade içeren denklemi rasyonel üslü ifade olarak yazarsak

$$\sqrt[3]{3^{2x-1}} = \sqrt[4]{3^{x+2}} \Rightarrow 3^{\frac{2x-1}{3}} = 3^{\frac{x+2}{4}}$$
$$\Rightarrow \underset{(4)}{\frac{2x-1}{3}} = \underset{(3)}{\frac{x+2}{4}}$$
$$\Rightarrow \frac{8x-4}{12} = \frac{3x+6}{12}$$
$$\Rightarrow 8x-4 = 3x+6$$
$$\Rightarrow 8x-3x = 6+4$$
$$\Rightarrow 5x = 10$$
$$\Rightarrow \frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}} = \frac{10}{5}$$
$$\Rightarrow x = 2 \text{ olur.}$$

Bu durumda denklemin çözüm kümesi $Ç = \{2\}$ bulunur.

ÖRNEK

$\sqrt{2^{3x+4}} = \sqrt[3]{8^{x-5}}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Köklü ifade içeren denklemi rasyonel üslü ifade olarak yazarsak

$$\sqrt{2^{3x+4}} = \sqrt[3]{8^{x-5}} \Rightarrow 2^{\frac{3x+4}{2}} = 8^{\frac{x-5}{3}}$$
$$\Rightarrow 2^{\frac{3x+4}{2}} = 2^{3\cdot\frac{x-5}{3}}$$
$$\Rightarrow \frac{3x+4}{2} = x-5$$
$$\Rightarrow 3x+4 = 2x-10$$
$$\Rightarrow 3x-2x = -10-4$$
$$\Rightarrow x = -14 \text{ olur.}$$

Bu durumda denklemin çözüm kümesi $Ç = \{-14\}$ bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıda verilen ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) $\sqrt{4}$ b) $\sqrt{(-6)^2}$ c) $\sqrt{169}$

ç) $\sqrt[3]{27}$ d) $\sqrt[3]{-125}$ e) $\sqrt[3]{-216}$

2. $-2 < x < 1$ olmak üzere

$$\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt[3]{x^3} + \sqrt{(x+2)^2}$$

işleminin sonucunu bulunuz.

3. $y < 0 < x$ olmak üzere

$$\frac{\sqrt{y^2} + \sqrt[3]{x^3}}{\sqrt[3]{y^3} - \sqrt{x^2}} + 1$$

işleminin sonucunu bulunuz.

4. Aşağıda verilen köklü ifadeleri rasyonel üslü olarak ifade ediniz.

a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{125}$ c) $\sqrt{\frac{1}{243}}$

ç) $\sqrt[3]{-3^7}$ d) $\sqrt[3]{16}$ e) $\sqrt[3]{-49}$

5. Aşağıda verilen gerçek sayıların hangi ardışık iki tam sayı arasında olduğunu bulunuz.

a) $\sqrt{2}$ b) $-\sqrt{21}$ c) $-\sqrt{50}$ ç) $\sqrt{130}$

6. Aşağıda verilen işlemlerin sonucunu bulunuz.

a) $6\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$

b) $8\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$

c) $9\sqrt[3]{9} + 7\sqrt[3]{9}$

ç) $10\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3}$

7. Aşağıda verilen işlemlerin sonucunu bulunuz.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ b) $3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{10}$

c) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5}$ ç) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}$

d) $2\sqrt[3]{15} \cdot \sqrt[3]{4}$ e) $6\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9}$

8. Aşağıda verilen işlemlerin sonucunu bulunuz.

a) $\frac{\sqrt{96}}{\sqrt{24}}$ b) $\frac{\sqrt{75}}{5}$

c) $\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{9}}$ ç) $\frac{\sqrt[3]{-216}}{2}$

9. $6\sqrt{32} + \sqrt{50} - \sqrt{72}$

işleminin sonucunu bulunuz.

10. $\sqrt[3]{(-5)^3} + \sqrt{(-7)^2} - \sqrt[4]{(-2)^4}$

işleminin sonucunu bulunuz.

11. $\sqrt{0,64} + \sqrt{1,96} + \sqrt[3]{0,216}$

işleminin sonucunu bulunuz.

12. $\sqrt[3]{32} + 2\sqrt[3]{108} - 3\sqrt[3]{256}$

işleminin sonucunu bulunuz.

13. $\sqrt[3]{23 + \sqrt{18 - \sqrt[3]{5 + \sqrt{9}}}}$

işleminin sonucunu bulunuz.

14. $\dfrac{\sqrt{128} + \sqrt{50}}{\sqrt{32} - \sqrt{18}}$

işleminin sonucunu bulunuz.

15. $\dfrac{\sqrt[10]{27} \cdot \sqrt[6]{243}}{\sqrt[15]{9}}$

işleminin sonucunu bulunuz.

16. $\dfrac{5\sqrt[3]{16} - 7\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{54}}$

işleminin sonucunu bulunuz.

17. $2(\sqrt[5]{5})^{10} + (\sqrt[3]{2})^{3} - (\sqrt[4]{3})^{12}$

işleminin sonucunu bulunuz.

18. $\dfrac{\sqrt{7} + \sqrt{7} + \sqrt{7} + \sqrt{7}}{2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7}}$

işleminin sonucunu bulunuz.

19. $\sqrt{7 - \sqrt{13}} \cdot \sqrt{7 + \sqrt{13}}$

işleminin sonucunu bulunuz.

20. $\dfrac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \dfrac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

işleminin sonucunu bulunuz.

21. $x = \sqrt{24} + \sqrt{20}$

$y = \sqrt{54} - \sqrt{45}$

olduğuna göre $x \cdot y$ çarpımının eşitini bulunuz.

22. $\sqrt[3]{2^{4x-3}} = \sqrt[4]{16^{x+1}}$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

1.2. DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLERLE İLGİLİ UYGULAMALAR

1.2.1. Oran ve Orantı Kavramları

Aynı birime sahip iki çokluğun birbirine bölünmesine **oran** denir. $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere bu sayıların birbirine oranı $\frac{a}{b}$ veya $a : b \ (b \neq 0)$ şeklinde gösterilir.
En az iki oranın eşitliğine **orantı** denir. $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$\frac{a}{b} = k$ ve $\frac{c}{d} = k$ ise $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ ifadesi bir orantıdır.

Bu orantı $(a : b = c : d)$ biçiminde de ifade edilebilir. Burada k gerçek sayısına **orantı sabiti** denir.

$$a : b = c : d$$

İçler

Dışlar

orantısında içler çarpımı, dışlar çarpımına eşittir. $a.d = b.c$ olur.

ÖRNEK

Sena 39, Levent ise 26 yaşındadır. Buna göre Levent'in yaşının Sena'nın yaşına oranını bulunuz.

ÇÖZÜM

$\frac{\text{Levent'in yaşı}}{\text{Sena'nın yaşı}} = \frac{26}{39} = \frac{2}{3}$ bulunur.

ÖRNEK

Bir otobüste 20 erkek, 16 kadın yolcu bulunmaktadır. İlk durakta otobüse 5 erkek ve 4 kadın yolcu binmiş; otobüsten 1 erkek ve 2 kadın yolcu inmiştir. Buna göre son durumda otobüsteki kadın sayısının erkek sayısına oranını bulunuz.

ÇÖZÜM

İlk durakta otobüse 5 erkek yolcu biner ve otobüsten 1 erkek yolcu inerse $20 + 5 - 1 = 24$ tane erkek yolcu kalır. Otobüse 4 kadın yolcu biner ve otobüsten 2 kadın yolcu inerse otobüste $16 + 4 - 2 = 18$ tane kadın yolcu kalır.
Buna göre son durumda otobüsteki kadın sayısının erkek sayısına oranı $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$ bulunur.

ÖRNEK

Cüneyt'in boyunun Serkan'ın boyuna oranı $\frac{2}{5}$ tir. Serkan'ın boyu 175 cm ise Cüneyt'in boyunun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Cüneyt'in boyunun Serkan'ın boyuna oranı $\frac{2}{5}$ olduğundan

$$\frac{\text{Cüneyt'in boyu}}{\text{Serkan'ın boyu}} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{\text{Cüneyt'in boyu}}{175} = \frac{2k}{5k}$$

olarak yazılabilir.

$$5k = 175 \Rightarrow \frac{\cancel{5}k}{\cancel{5}} = \frac{175}{5}$$
$$\Rightarrow k = 35 \text{ olur.}$$

Bu durumda Cüneyt'in boyu $2k = 2 \cdot 35 = 70$ cm bulunur.

ÖRNEK

Bir sınıftaki kız öğrencilerin sayısının erkek öğrencilerin sayısına oranı $\frac{3}{5}$ tir. Sınıfta toplam 32 öğrenci olduğuna göre sınıfta kaç erkek öğrenci olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Bir sınıftaki kız öğrencilerin sayısının erkek öğrencilerin sayısına oranı $\frac{3}{5}$ olduğundan

$$\frac{\text{Kızların sayısı}}{\text{Erkeklerin sayısı}} = \frac{3}{5} = \frac{3k}{5k}$$

olarak yazılabilir. Kızların sayısı 3k ve erkeklerin sayısı 5k olarak alınırsa

$$3k + 5k = 32 \Rightarrow 8k = 32$$
$$\Rightarrow \frac{\cancel{8}k}{\cancel{8}} = \frac{32}{8}$$
$$\Rightarrow k = 4 \text{ olur.}$$

Bu durumda erkek öğrenci sayısı $5k = 5 \cdot 4 = 20$ bulunur.

ÖRNEK

Ayşe'nin boyunun Leyla'nın boyuna oranı $\frac{4}{9}$ dur. Ayşe ile Leyla'nın boy uzunlukları farkı 50 cm olduğuna göre Leyla'nın boy uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Ayşe'nin boyunun Leyla'nın boyuna oranı $\frac{4}{9}$ olduğundan

$$\frac{\text{Ayşe'nin boyu}}{\text{Leyla'nın boyu}} = \frac{4}{9} = \frac{4k}{9k}$$

olarak yazılabilir. Ayşe'nin boyu 4k ve Leyla'nın boyu 9k olarak alınırsa

$$9k - 4k = 50 \Rightarrow 5k = 50$$
$$\Rightarrow \frac{\cancel{5}k}{\cancel{5}} = \frac{50}{5}$$
$$\Rightarrow k = 10 \text{ olur.}$$

Bu durumda Leyla'nın boy uzunluğu $9k = 9 \cdot 10 = 90$ cm bulunur.

ÖRNEK

$\frac{a}{b} = \frac{1}{4}$ olduğuna göre $\frac{5a + b}{2a - b}$ oranını bulunuz.

ÇÖZÜM

$\frac{a}{b} = \frac{1}{4}$ olduğundan $a = k$ ve $b = 4k$ alınırsa

$\frac{5a + b}{2a - b} = \frac{5k + 4k}{2k - 4k} = \frac{9k}{-2k} = -\frac{9}{2}$ bulunur.

ÖRNEK

$\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$ ve $\frac{b}{c} = \frac{5}{7}$ olduğuna göre $\frac{a + b}{c - b}$ oranını bulunuz.

ÇÖZÜM

$\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$ ve $\frac{b}{c} = \frac{5}{7}$ olduğundan $a = 2k$, $b = 5k$ ve $c = 7k$ alınırsa

$\frac{a + b}{c - b} = \frac{2k + 5k}{7k - 5k} = \frac{7k}{2k} = \frac{7}{2}$ bulunur.

ÖRNEK

$\frac{a}{b}=\frac{1}{4}$ ve $\frac{b}{c}=\frac{3}{4}$ olduğuna göre $\frac{a}{c}$ oranını bulunuz.

ÇÖZÜM

Her iki orantıda bulunan b çoklukları eşitlenir.

$\frac{a}{b}=\frac{1}{4}=\frac{1\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{3}{12}$ ve $\frac{b}{c}=\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 4}{4\cdot 4}=\frac{12}{16}$ olur. O hâlde $a=3k$, $b=12k$ ve $c=16k$

alınırsa $\frac{a}{c}=\frac{3k}{16k}=\frac{3}{16}$ bulunur.

ÖRNEK

$\frac{a}{a+b}=\frac{3}{5}$ olduğuna göre $\frac{a-b}{2a}$ oranını bulunuz.

ÇÖZÜM

$\frac{a}{a+b}=\frac{3}{5}$ orantısında içler dışlar çarpımı yapılırsa

$$\frac{a}{a+b}=\frac{3}{5}\Rightarrow 5\cdot a=3\cdot(a+b)$$
$$\Rightarrow 5a=3a+3b$$
$$\Rightarrow 5a-3a=3b$$
$$\Rightarrow 2a=3b$$
$$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{3}{2} \text{ olur.}$$

Bu durumda $a=3k$ ve $b=2k$ alınırsa $\frac{a-b}{2a}=\frac{3k-2k}{2\cdot 3k}=\frac{k}{6k}=\frac{1}{6}$ bulunur.

Orantının Özellikleri

1. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ ise $a\cdot d=b\cdot c$ olur.
   Bir orantıda içler çarpımı dışlar çarpımına eşittir.

2. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ise $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ ve $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ olur.
   Bir orantıda içler veya dışlar yer değiştirebilir.

3. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ ise $\frac{a+c}{b+d}=k$ olur.
   Bir orantıda paylar toplanıp paya ve paydalar toplanıp paydaya yazılırsa orantı sabiti değişmez. Genel olarak $x, y\in\mathbb{R}$ ise

   $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \text{ ise } \frac{a\cdot x}{b\cdot x}=\frac{c\cdot y}{d\cdot y}=k \text{ ve } \frac{a\cdot x+c\cdot y}{b\cdot x+d\cdot y}=k \text{ olur.}$$

4. a sayısı x ile ve b sayısı y ile orantılı ise bu durum

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=k \text{ veya } a:x=b:y$$

biçimde ifade edilir.

ÖRNEK

$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}$ ve $a+b+c=18$ olduğuna göre $c-a$ kaçtır?.

ÇÖZÜM

$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=k$ olsun. $\frac{a}{2}=k \Rightarrow a=2k$

$\frac{b}{3}=k \Rightarrow b=3k$

$\frac{c}{4}=k \Rightarrow c=4k$ olur.

$a+b+c=18 \Rightarrow 2k+3k+4k=18$

$\Rightarrow 9k=18$

$\Rightarrow \frac{\cancel{9}k}{\cancel{9}}=\frac{18}{9}$

$\Rightarrow k=2$ elde edilir.

Bu durumda $a=2k=2\cdot 2=4$ ve $c=4k=4\cdot 2=8$ olacağından $c-a=8-4=4$ bulunur.

ÖRNEK

a, b ve c sayıları sırasıyla 3, 4 ve 5 ile orantılıdır. $a+2b+3c=78$ olduğuna göre a sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

a, b ve c sayıları sırasıyla 3, 4 ve 5 ile orantılı olduğundan

$\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}=k$ olur. $\frac{a}{3}=k \Rightarrow a=3k$

$\frac{b}{4}=k \Rightarrow b=4k$

$\frac{c}{5}=k \Rightarrow c=5k$ elde edilir.

$a+2b+3c=78 \Rightarrow 3k+2\cdot 4k+3\cdot 5k=78$

$\Rightarrow 3k+8k+15k=78$

$\Rightarrow 26k=78$

$\Rightarrow \frac{\cancel{26}k}{\cancel{26}}=\frac{78}{26}$

$\Rightarrow k=3$ olur.

Bu durumda $a=3k=3\cdot 3=9$ bulunur.

ÖRNEK

$a = 3b = 2c$ ve $a + b - c = 15$ olduğuna göre a sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

$a = 3b = 2c = 6k$ olsun. Bu durumda $a = 6k$, $b = 2k$ ve $c = 3k$ olur.

$a + b - c = 15 \Rightarrow 6k + 2k - 3k = 15$

$\Rightarrow 5k = 15$

$\Rightarrow \dfrac{\cancel{5}k}{\cancel{5}} = \dfrac{15}{5}$

$\Rightarrow k = 3$ olur.

O hâlde $a = 6k \Rightarrow a = 6 \cdot 3 = 18$ bulunur.

ÖRNEK

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f} = 3$ olduğuna göre $\dfrac{4a + 7c - 3e}{4b + 7d - 3f}$ oranını bulunuz.

ÇÖZÜM

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f} = 3$ olduğundan $\dfrac{4a}{4b} = \dfrac{7c}{7d} = \dfrac{-3e}{-3f} = 3$ olur ve $\dfrac{4a + 7c - 3e}{4b + 7d - 3f} = 3$ bulunur.

ÖRNEK

a, b, c, d, e ve f sıfırdan farklı gerçek sayılar olmak üzere

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f} = \dfrac{2}{3}$

$3f + 2b - 4d = 36$

$3e - 4c = 18$

olduğuna göre a sayısının eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f} = \dfrac{2}{3}$ olduğundan $\dfrac{2a}{2b} = \dfrac{-4c}{-4d} = \dfrac{3e}{3f} = \dfrac{2}{3}$ ve $\dfrac{2a - 4c + 3e}{2b - 4d + 3f} = \dfrac{2}{3}$ olur.

Buradan $2a - 4c + 3e = 2k$ ve $2b - 4d + 3f = 3k$ eşitlikleri elde edilir.

$3f + 2b - 4d = 36$ olduğundan $3k = 36 \Rightarrow \dfrac{\cancel{3}k}{\cancel{3}} = \dfrac{36}{3} \Rightarrow k = 12$ bulunur.

Bu durumda $2a - 4c + 3e = 2k \Rightarrow 2a - 4c + 3e = 2 \cdot 12 = 24$ olur.

$2a \underbrace{- 4c + 3e}_{18} = 24 \Rightarrow 2a + 18 = 24 \Rightarrow 2a = 24 - 18 \Rightarrow \dfrac{\cancel{2}a}{\cancel{2}} = \dfrac{6}{2} \Rightarrow a = 3$ bulunur.

ÖRNEK

Bir meslek lisesinin Kimya Teknolojisi bölümü öğrencileri, boya yapımında kullanmak üzere A, B ve C maddelerinden oluşan 1750 g lık bir karışım hazırlamışlardır. Bu maddelerin karışım oranları $\frac{A}{B}=\frac{2}{3}$ ve $\frac{B}{C}=\frac{4}{5}$ olduğuna göre karışımda B maddesinden kaç g kullanıldığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Her iki orantıda bulunan B maddeleri eşitlenir.

$$\frac{A}{B}=\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 4}=\frac{8}{12} \text{ ve } \frac{B}{C}=\frac{4}{5}=\frac{4\cdot 3}{5\cdot 3}=\frac{12}{15} \text{ olur.}$$

O hâlde $A=8k,\ B=12k$ ve $C=15k$ alınabilir. Bu değerler $A+B+C=1750$ eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$A+B+C=1750 \Rightarrow 8k+12k+15k=1750$$
$$\Rightarrow 35k=1750$$
$$\Rightarrow \frac{\cancel{35}k}{\cancel{35}}=\frac{1750}{35} \Rightarrow k=50 \text{ olur.}$$

Bu durumda karışımda B maddesinden $12k=12\cdot 50=600\,g$ kullanılmıştır.

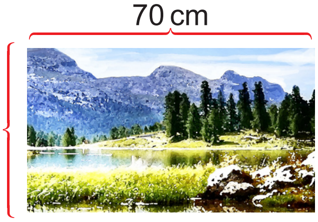
ÖRNEK

Güzel sanatlar lisesi öğrencisi Onat, boyutları 50 cm x 70 cm olan dikdörtgen şeklinde bir resim yapmıştır. Onat'ın yapmış olduğu resim çok beğenilmiş ve resim boyutlarının aynı oranda büyütülmesine karar verilmiştir. Büyütülen resmin çevre uzunluğu 720 cm olduğuna göre resmin boyutlarının kaç cm olduğunu bulunuz.

Görsel 1.2

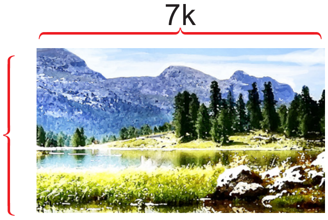
ÇÖZÜM

Onat'ın yapmış olduğu resmin boyutları 50 cm x 70 cm olduğundan



$$\frac{\text{Dikdörtgenin uzun kenarı}}{\text{Dikdörtgenin kısa kenarı}}=\frac{70}{50}=\frac{7}{5} \text{ olur.}$$

O hâlde büyütülen resmin uzun kenarı 7k ve kısa kenarı 5k olarak alınır. Büyütülen resmin çevre uzunluğu 720 cm olduğundan



$$7k+5k+7k+5k=720 \Rightarrow 24k=720$$
$$\Rightarrow \frac{\cancel{24}k}{\cancel{24}}=\frac{720}{24}$$
$$\Rightarrow k=30 \text{ olur.}$$

Bu durumda resmin boyutları $7k=7\cdot 30=210\,cm$ ve $5k=5\cdot 30=150\,cm$ bulunur.

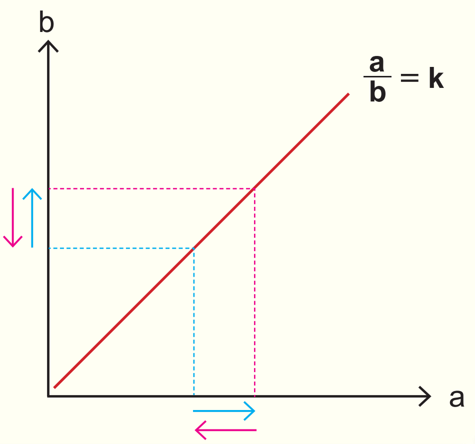
Orantı Çeşitleri

1. Doğru Orantı

İki çokluktan biri artarken diğeri de aynı oranda artıyorsa veya biri azalırken diğeri de aynı oranda azalıyorsa bu iki çokluk doğru orantılıdır.
a ile b doğru orantılı ise

$\frac{a}{b} = k$ veya $a = b \cdot k$ olur (k orantı sabitidir).

"İki sayı orantılıdır." demek, aksi belirtilmedikçe iki sayının doğru orantılı olduğu anlamına gelir.



ÖRNEK

a sayısı b sayısı ile doğru orantılıdır. $a = 24$ iken $b = 6$ olduğuna göre $a = 16$ iken b değerinin kaç olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

I. Yol

a sayısı b sayısı ile doğru orantılı ise $\frac{a}{b} = k$ olur.

$a = 24$ iken $b = 6$ olduğuna göre $\frac{24}{6} = k \Rightarrow k = 4$ olur.

$a = 16$ iken b değeri istenildiğinde $\frac{16}{b} = k \Rightarrow \frac{16}{b} = 4 \Rightarrow b = \frac{16}{4} = 4$ bulunur.

II. Yol

a sayısı b sayısı ile doğru orantılı olduğunda içler dışlar çarpımı yapılır.

$a = 24$ iken $b = 6$ ise
$a = 16$ iken $b = x$ olur.

D. O.

$24x = 16 \cdot 6 \Rightarrow x = \frac{96}{24} = 4$ bulunur.

ÖRNEK

148 TL yaşları 10, 12 ve 15 olan 3 kardeşe yaşları ile orantılı olarak paylaştırılmak isteniyor. Buna göre her bir kardeşin kaç TL para alacağını bulunuz.

ÇÖZÜM :

15 yaşındaki kardeş a TL
12 yaşındaki kardeş b TL
10 yaşındaki kardeş c TL olarak paylaştırılsın. O hâlde
$\frac{a}{15} = \frac{b}{12} = \frac{c}{10} = k$ olur.

Buradan $a = 15k$, $b = 12k$ ve $c = 10k$ olur. Paylaştırılan tutar 148 TL olduğundan

$$a + b + c = 148 \Rightarrow 15k + 12k + 10k = 148$$
$$\Rightarrow 37k = 148$$
$$\Rightarrow \frac{\cancel{37}k}{\cancel{37}} = \frac{148}{37}$$
$$\Rightarrow k = 4 \text{ elde edilir.}$$

Bu durumda 15 yaşındaki kardeş $a = 15k = 15 \cdot 4 = 60$ TL
12 yaşındaki kardeş $a = 12k = 12 \cdot 4 = 48$ TL
10 yaşındaki kardeş $c = 10k = 10 \cdot 4 = 40$ TL para alır.

ÖRNEK

Bir markette açık olarak satılan zeytinin kg fiyatı 15 TL, peynirin kg fiyatı 28 TL dir. Buna göre zeytinden 400 g, peynirden ise 700 g alan bir kişinin toplam kaç TL ödeyeceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Zeytinin 1 kg fiyatı 15 TL' dir. $1 kg = 1000 g$ olduğundan 1000 g zeytin 15 TL dir. 400 g zeytinin fiyatı a TL olsun. O hâlde

1000 g — 15 TL ise
400 g — a TL olur.

D. O.
$$15 \cdot 400 = 1000 \cdot a \Rightarrow a = \frac{6000}{1000} = 6 \text{ TL olur.}$$

Benzer şekilde peynirin 1 kg fiyatı 28 TL dir. $1 kg = 1000 g$ olduğundan 1000 g peynir 28 TL dir. 700 g peynirin fiyatı b TL olsun. O hâlde

1000 g — 28 TL ise
700 g — b TL olur.

D. O.
$$28 \cdot 700 = 1000 \cdot b \Rightarrow b = \frac{19600}{1000} = 19,6 \text{ TL olur.}$$

Bu durumda ödenecek toplam tutar $6 TL + 19,6 TL = 25,6$ TL bulunur.

ÖRNEK

"Fidanlar, Fidanlarla Büyüyor" projesi kapsamında öğrenciler okul bahçesine fidan dikimi gerçekleştirmişlerdir. Dikildiğinde boyu 30 cm olan bir fidan her ay 5 cm uzamaktadır. Buna göre dikilen fidanın boyunun kaçıncı ayın sonunda 150 cm olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

Fidanın boyu her ay 5 cm uzayacağı için boy ile zaman doğru orantılıdır. Fidanın dikildiği andaki boyu 30 cm dir. Boyunun 150 cm olması için $150\text{ cm} - 30\text{ cm} = 120\text{ cm}$ daha uzaması gerekir.

$$\begin{array}{ll} 1 \text{ ayda} & 5 \text{ cm uzarsa} \\ t \text{ ayda} & 120 \text{ cm uzar.} \\ \hline \end{array}$$

D. O.

$$5 \cdot t = 120 \Rightarrow t = \frac{120}{5} = 24 \text{ ay olur.}$$

Bu durumda 24 ayın sonunda fidanın boyunun 150 cm olacağı bulunur.

ÖRNEK

Bir meslek lisesinin Yiyecek ve İçecek Hizmetleri bölümü öğrencileri yıl sonu etkinlikleri kapsamında limonata yapmakla görevlendirilmişlerdir.

3 limondan ortalama 2 bardak limonata elde edilmektedir. Bölümün mutfağında 186 tane limon olduğuna göre ortalama kaç bardak limonata elde edileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Limon adedi ile limonata miktarı arasında doğru orantı vardır.

$$\begin{array}{ll} 3 \text{ limondan} & 2 \text{ bardak limonata} \\ 186 \text{ limondan} & a \text{ bardak limonata} \\ \hline \end{array}$$

D. O.

$$3 \cdot a = 2 \cdot 186 \Rightarrow a = \frac{372}{3} = 124 \text{ olur.}$$

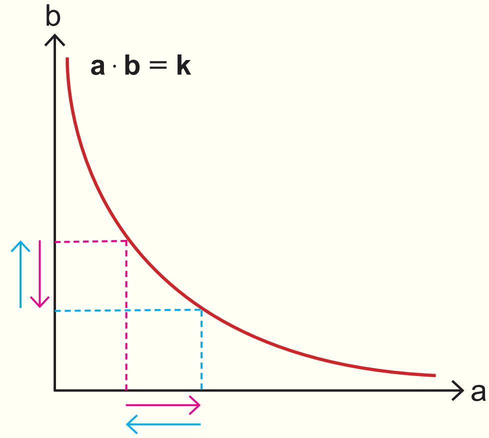
Bu durumda 186 tane limondan ortalama 124 bardak limonata elde edilir.

2. Ters Orantı

İki çokluktan biri artarken diğeri aynı oranda azalıyorsa veya biri azalırken diğeri aynı oranda artıyorsa bu iki çokluk ters orantılıdır.

a ile b ters orantılı ise

$a = \frac{k}{b}$ veya $a \cdot b = k$ olur (k orantı sabitidir).



ÖRNEK

a sayısı b sayısı ile ters orantılıdır. $a = 15$ iken $b = 4$ olduğuna göre $a = 6$ iken b değerinin kaç olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

I. Yol

a sayısı b sayısı ile ters orantılı ise

$a \cdot b = k$ olur. $a = 15$ iken $b = 4$

olduğuna göre $15 \cdot 4 = k \Rightarrow k = 60$ olur.

$a = 6$ iken b değeri istenildiğinden

$60 = 6 \cdot b \Rightarrow b = \frac{60}{6} = 10$ bulunur.

II. Yol

a sayısı b sayısı ile ters orantılı olduğunda

$a = 15$ iken $\longrightarrow$ $b = 4$ ise

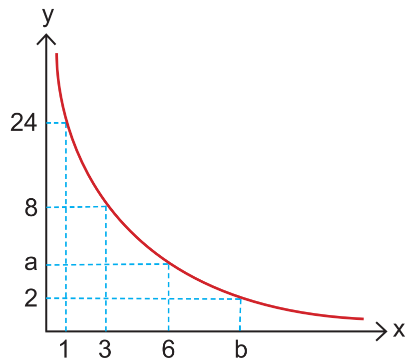
$a = 6$ iken $\longrightarrow$ $b = x$ olur.

T.O.

$6 \cdot x = 15 \cdot 4 \Rightarrow x = \frac{60}{6} = 10$ bulunur.

ÖRNEK

Yanda ters orantılı iki çokluğa ait grafik verilmiştir. Buna göre a ve b değerlerini bulunuz.



ÇÖZÜM

Grafik ters orantılı iki çokluğa aittir. O hâlde $x \cdot y = k$ olur. $x = 1$ için $y = 24$ olduğundan $1 \cdot 24 = k \Rightarrow k = 24$ elde edilir. $x = 6$ iken $y = a$ olduğundan $6a = 24 \Rightarrow a = 4$ bulunur. Ayrıca $x = b$ iken $y = 2$ olduğundan $b \cdot 2 = 24 \Rightarrow b = 12$ bulunur.

ÖRNEK

Bir meslek lisesinin Metal Teknolojisi bölümü öğrencileri 310 cm uzunluğunda bir teli 2, 3 ve 5 ile ters orantılı olacak şekilde üç parçaya bölmek istiyorlar. Buna göre en kısa parçanın uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Kesilecek her bir parçanın uzunluğu sırasıyla a, b ve c cm olsun.
O hâlde $a+b+c=310$ cm dir. a, b ve c sayıları sırasıyla 2, 3 ve 5 ile ters orantılı olduğundan $2a=3b=5c=k$ olacaktır. Buradan
$2a=k \Rightarrow a=\frac{k}{2}$, $3b=k \Rightarrow b=\frac{k}{3}$ ve $5c=k \Rightarrow c=\frac{k}{5}$ olur.

$$a+b+c=310 \Rightarrow \underset{(15)}{\frac{k}{2}}+\underset{(10)}{\frac{k}{3}}+\underset{(6)}{\frac{k}{5}}=310$$

$$\Rightarrow \frac{15k+10k+6k}{30}=310$$

$$\Rightarrow \frac{31k}{30}=310$$

$$\Rightarrow 31k=310\cdot 30$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{31}k}{\cancel{31}}=\frac{9300}{31}$$

$$\Rightarrow k=300 \text{ olur.}$$

$k=300$ olduğundan

$$a=\frac{k}{2}=\frac{300}{2}=150\text{ cm}$$

$$b=\frac{k}{3}=\frac{300}{3}=100\text{ cm}$$

$c=\frac{k}{5}=\frac{300}{5}=60$ cm olur. Bu durumda en kısa parçanın uzunluğu 60 cm bulunur.

ÖRNEK

Aynı nitelikteki 4 işçi bir apartmanın boya ve badana işlerini 5 günde tamamlayabiliyor. Buna göre aynı nitelikteki 10 işçinin aynı işi kaç günde bitirebileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

İşçi sayısı arttıkça işin bitirilme süresi azalacaktır. Bu nedenle işçi sayıları ile işin bitirilme süresi arasında ters orantı vardır.

4 işçi ⟶ 5 günde yaparsa
10 işçi ⟶ t günde yapar.
T.O.

$$10\cdot t=4\cdot 5 \Rightarrow 10t=20$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{10}t}{\cancel{10}}=\frac{20}{10}$$

$$\Rightarrow t=2 \text{ gün bulunur.}$$

ÖRNEK

Bir büyükbaş hayvan çiftliğinde 60 adet inek vardır. 60 ineğe 24 gün yetecek kadar yem bulunmaktadır. 4 gün sonra çiftlikteki ineklerden 20 tanesi satılıyor. Buna göre kalan yemin çiftlikte kalan ineklere kaç gün yeteceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

60 ineğe 24 gün yetecek yem, 4 gün sonra $24-4=20$ gün yeter. Kalan yem 20 tane ineğin satılmasıyla 40 ineğe verilecektir.

60 ineğe $\longrightarrow$ 20 gün yeterse
40 ineğe $\longrightarrow$ t gün yeter.

T.O.

$$40\cdot t=60\cdot 20 \Rightarrow 40\cdot t=1200$$
$$\Rightarrow \frac{\cancel{40}\,t}{\cancel{40}}=\frac{1200}{40}$$
$$\Rightarrow t=30 \text{ olur.}$$

Bu durumda kalan yem 30 gün yeter.

ÖRNEK

Bir meslek lisesinin Makine Teknolojisi bölümü öğrencileri geliştirdikleri bir makineye, birbirini çeviren 2 çark monte etmişlerdir. Büyük çarkta 48, küçük çarkta 36 diş bulunmaktadır. Makine çalıştırılınca büyük çark 3 tur attığında küçük çarkın kaç tur atacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

Birbirini çeviren iki çarktan büyük olanı bir tam tur atarken küçük olan çark daha fazla tur atacaktır. Çarktaki diş sayısı arttıkça attığı tur sayısı azalacağından aralarında ters orantı vardır. Bu durumda

48 dişli çark $\longrightarrow$ 3 tur atarsa
36 dişli çark $\longrightarrow$ n tur atar.

T.O.

$$48\cdot 3=36\cdot n \Rightarrow 36\cdot n=144$$
$$\Rightarrow \frac{\cancel{36}\,n}{\cancel{36}}=\frac{144}{36}$$
$$\Rightarrow n=4 \text{ tur atar.}$$

ALIŞTIRMALAR

1. Selçuk'un boyu 160 cm ve Hakan'ın boyu 190 cm dir.

Buna göre Selçuk'un boyunun Hakan'ın boyuna oranını bulunuz.

2. $\frac{a}{b} = \frac{3}{8}$ olduğuna göre $\frac{3a+b}{b-a}$ oranını bulunuz.

3. $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$ ve $\frac{b}{c} = \frac{3}{7}$ olduğuna göre $\frac{a}{c}$ oranını bulunuz.

4. $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$ ve $a+b+c = 48$ olduğuna göre $c-b$ kaçtır?

5. a, b ve c sayıları sırasıyla 2, 5 ve 7 ile orantılıdır. $2a+3b+c = 52$ olduğuna göre b sayısını bulunuz.

6. $\frac{b}{a-b} = \frac{1}{4}$ olduğuna göre $\frac{a+b}{3b}$ oranını bulunuz.

7. Bir meslek lisesinin Kimya Teknolojisi bölümü öğrencileri A, B ve C maddelerinden oluşan 130 litrelik bir karışım elde ediyorlar.

$\frac{A}{B} = \frac{1}{3}$ ve $\frac{B}{C} = \frac{5}{2}$

olduğuna göre karışımda bulunan B maddesinin kaç litre olduğunu bulunuz.

8. a sayısı b sayısı ile doğru orantılıdır. $a = 48$ iken $b = 8$ olduğuna göre $a = 30$ iken b değerinin kaça eşit olacağını bulunuz.

9. Bir kuru yemişçide satılan Antep fıstığının kilogram fiyatı 80 TL dir.
Buna göre 480 g Antep fıstığı alan bir kişinin kaç TL ödeyeceğini bulunuz.

10. a sayısı b sayısı ile ters orantılıdır. $a = 24$ iken $b = 5$ olduğuna göre $a = 30$ iken b değerinin kaça eşit olacağını bulunuz.

11. 4, 5 ve 6 yaşlarında olan üç kardeşe yaşları ile ters orantılı olacak şekilde 37 adet oyuncak dağıtılmıştır. Buna göre 6 yaşındaki çocuğun alacağı oyuncak sayısını bulunuz.

12. Bir gençlik kampında bulunan 25 kişiye 12 gün yetecek kadar yiyecek vardır. 3 gün sonra 10 kişi kamptan ayrılıyor.
Buna göre kalan yiyeceklerin kampta kalan kişilere kaç gün yeteceğini bulunuz.

1.2.2. Denklemler ve Eşitsizliklerle İlgili Problemler

Günlük hayatta karşılaşılan bazı problemlerin çözümünde matematiksel ifadeleri kullanabilmek için cebirsel ifadelerden yararlanılabilir. Aşağıdaki tabloda sözel olarak verilen ifadelere karşılık gelen cebirsel ifadeler gösterilmiştir.

Sözel İfade	Cebirsel İfade
Bir sayının 2 eksiği	$x - 2$
Ali'nin yaşının 3 katı	$3x$
Bir sayının 3 katının 2 eksiği	$3x - 2$
Bir sayının dört fazlasının 2 katı	$2(x + 4)$
Mehmet'in cebindeki parasının yarısının 3 fazlası	$\frac{x}{2} + 3$
5 ten küçük sayılar	$x < 5$

ÖRNEK

2 katının 3 eksiği 7 olan sayıyı bulunuz.

ÇÖZÜM

İstenen sayı x olsun. O hâlde verilen sözel ifade cebirsel olarak $2x - 3 = 7$ şeklinde yazılır.
Buradan $2x - 3 = 7 \Rightarrow 2x = 7 + 3$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$ bulunur.

ÖRNEK

Bir sayının 2 katının 6 fazlası ile aynı sayının 1 eksiğinin toplamı 20 ise bu sayıyı bulunuz.

ÇÖZÜM

İstenen sayı x olsun. O hâlde verilen sözel ifade cebirsel olarak $2x + 6 + x - 1 = 20$ şeklinde yazılır. Buradan $2x + 6 + x - 1 = 20$

$$2x + x = 20 - 6 + 1$$

$$3x = 15$$

$$x = 5$$ bulunur.

ÖRNEK

Murat, bir merdiveni ikişer ikişer çıkıp üçer üçer inmiştir. İnerken ve çıkarken toplam 35 adım attığına göre merdivenin kaç basamaklı olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Merdivenin basamak sayısına x diyelim. Murat, çıkarken $\frac{x}{2}$ inerken $\frac{x}{3}$ adım atmış olur.

Buradan $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 35$ olur.

$$\underset{(3)}{\frac{x}{2}} + \underset{(2)}{\frac{x}{3}} = 35 \Rightarrow \frac{3x}{6} + \frac{2x}{6} = 35 \Rightarrow \frac{5x}{6} = 35$$

$$\Rightarrow 5x = 6 \cdot 35$$

$$\Rightarrow 5x = 210$$

$$\Rightarrow x = 42 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

Bir sayının $\frac{2}{5}$ i ile $\frac{2}{3}$ ünün toplamı 32 ise bu sayıyı bulunuz.

ÇÖZÜM

İstenen sayı x olsun. O hâlde verilen sözel ifade cebirsel olarak $\frac{2x}{5} + \frac{2x}{3} = 32$ biçiminde yazılır. Buradan

$$\underset{(3)}{\frac{2x}{5}} + \underset{(5)}{\frac{2x}{3}} = 32 \Rightarrow \frac{6x}{15} + \frac{10x}{15} = 32 \Rightarrow \frac{16x}{15} = 32$$

$$\Rightarrow 16x = 480$$

$$\Rightarrow x = 30 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

Bir marangoz bir tahta parçasının $\frac{1}{5}$ ini kestiğinde orta noktası 3 cm kaymaktadır. Buna göre tahta parçasının kesilmeden önceki boyunun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Tahta parçasının uzunluğu x cm olsun. Bu durumda kesilen kısmı $x \cdot \frac{1}{5} = \frac{x}{5}$ cm olur.

Bir ucundan a cm kesilen tahta parçasının orta noktası $\frac{a}{2}$ cm kayar.

O hâlde telin orta noktası $\frac{x}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{x}{10}$ cm kayar.

Bu durumda $\frac{x}{10} = 3 \Rightarrow x = 3 \cdot 10 = 30$ cm bulunur.

ÖRNEK

Bir kesrin payı, paydasının 2 katından 3 fazladır. Bu kesrin payından 2 çıkarılır, paydasına 2 eklenirse kesrin değeri $\frac{5}{4}$ oluyor. Buna göre bu kesrin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Kesrin paydasına x dersek, payı $2x + 3$ olur. O hâlde kesir $\frac{2x+3}{x}$ dir. Bu kesrin payından 2 çıkarılır, paydasına 2 eklenirse değeri $\frac{5}{4}$ olacağından $\frac{2x+3-2}{x+2} = \frac{5}{4}$ yazılır. Buradan

$$\frac{2x+3-2}{x+2} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{2x+1}{x+2} = \frac{5}{4}$$

$$8x + 4 = 5x + 10$$

$$8x - 5x = 10 - 4$$

$$3x = 6$$

$$x = 2 \text{ olur.}$$

$\frac{2x+3}{x}$ kesrinde x değeri yerine yazılırsa $\frac{2 \cdot 2 + 3}{2} = \frac{7}{2}$ bulunur.

ÖRNEK

Cemil, cebindeki parasının önce $\frac{2}{5}$ ini daha sonra kalan parasının $\frac{1}{3}$ ünü harcamıştır. Geriye 24 TL si kaldığına göre Cemil'in cebinde başlangıçta kaç TL si olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Başlangıçta Cemil'in cebinde $5x$ TL olsun. Parasının önce $5x \cdot \frac{2}{5} = \frac{10x}{5} = 2x$ TL sini harcadığından kalan parası $5x - 2x = 3x$ TL olur.

Cemil kalan paranın $3x \cdot \frac{1}{3} = \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = x$ TL sini de harcadığından geriye $3x - x = 2x$ TL si kalır.

Bu durumda

$$2x = 24 \Rightarrow \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{24}{2}$$

$$\Rightarrow x = 12 \text{ olur.}$$

O hâlde Cemil'in cebinde başlangıçta $5x = 5 \cdot 12 = 60$ TL vardır.

ÖRNEK

Bir çiftçinin ektiği tohumların $\frac{4}{7}$ si çimlenmiştir. Çimlenen tohumların $\frac{2}{3}$ ü meyve vermiştir. Meyve veren tohum sayısı 32 olduğuna göre çiftçinin kaç adet tohum ektiğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Çiftçinin ektiği tohum sayısı x olsun. O hâlde tohumların $x \cdot \frac{4}{7} = \frac{4x}{7}$ si çimlenmiştir. Çimlenen tohumların $\frac{4x}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8x}{21}$ i meyve vermiştir. Bu durumda çiftçi

$$\frac{8x}{21} = 32 \Rightarrow 8x = 32 \cdot 21 \Rightarrow \frac{\cancel{8}x}{\cancel{8}} = \frac{672}{8}$$

$$\Rightarrow x = 84 \text{ tane tohum ekmiştir.}$$

Yaş problemlerinde:

- Bir kişinin şimdiki yaşı a ise t yıl sonraki yaşı $a + t$, t yıl önceki yaşı $a - t$ olur.
- Kişilerin yaşları farkı sabittir.
- Bugünkü yaşları toplamı x olan n tane kişinin t yıl sonraki yaşları toplamı $x + n \cdot t$, t yıl önceki yaşları toplamı $x - n \cdot t$ olur.

ÖRNEK

Anne, baba ve iki çocuktan oluşan bir ailenin şimdiki yaşları toplamı 84 tür. Buna göre bu ailenin 3 yıl sonra yaşları toplamının kaç olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

Ailedeki dört bireyin hepsi 3 yıl sonra 3 er yaş alacağına göre yaşları toplamı $3 \cdot 4 = 12$ artar. Şimdi 84 olan yaşları toplamı da 3 yıl sonra $84 + 12 = 96$ olur.

ÖRNEK

Bir annenin yaşı, kızının yaşının 3 katından 9 eksiktir. Anne ile kızının yaşları toplamı 63 olduğuna göre annenin yaşını bulunuz.

ÇÖZÜM

Kızın yaşına x dersek, annenin yaşı $3x - 9$ olur. İkisinin yaşları toplamı 63 ise;

$$x + 3x - 9 = 63$$
$$4x = 72$$
$$x = 18 \text{ olur.}$$

Annenin yaşı $3x - 9$ olduğundan $3 \cdot 18 - 9 = 54 - 9 = 45$ bulunur.

Yüzde problemlerinde bir x sayısının %y si, $x \cdot \frac{y}{100}$ olur.

ÖRNEK

%25 i 35 olan sayıyı bulunuz.

ÇÖZÜM

Sayı x olsun. Bu durumda

$x \cdot \frac{25}{100} = 35 \Rightarrow 25x = 35 \cdot 100 \Rightarrow \frac{\cancel{25}x}{\cancel{25}} = \frac{3500}{25} \Rightarrow x = 140$ bulunur.

ÖRNEK

Bir dikdörtgenin kısa kenar uzunluğu %10 azaltılıp uzun kenar uzunluğu %20 artırıldığında dikdörtgensel bölgenin alanının ne kadar değişeceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Dikdörtgenin kısa kenar uzunluğuna 10x cm, uzun kenar uzunluğuna 10y cm dersek alanı

$10x \cdot 10y = 100xy\ cm^2$ olur.

Kısa kenar uzunluğu %10 azaltıldığında $10x \cdot \frac{10}{100} = \frac{\cancel{100}x}{\cancel{100}} = x\ cm$ azalır ve

$10x - x = 9x\ cm$ olur.

Uzun kenar uzunluğu %20 arttırıldığında $10y \cdot \frac{20}{100} = \frac{200y}{100} = 2y$ artar ve

$10y + 2y = 12y\ cm$ olur.

Bu durumda dikdörtgensel bölgenin alanı $9x \cdot 12y = 108xy\ cm^2$ olduğundan %8 artmıştır.

ÖRNEK

Bir manav elindeki ürünlerin ilk gün %30 unu ikinci gün kalan ürünlerin %40 ını satmıştır. Buna göre manavın ikinci günün sonunda ürünlerin yüzde kaçını <u>satamadığını</u> bulunuz.

ÇÖZÜM

Manavın başlangıçta elinde bulunan ürün miktarına 100x diyelim.

Bu durumda ilk gün ürünlerin %30 u $100x \cdot \frac{30}{100} = \frac{3000x}{100} = 30x$ satıldığından elinde günün sonunda kalan ürün $100x - 30x = 70x$ olur.

İkinci gün kalan ürünlerin %40 ı $70x \cdot \frac{40}{100} = \frac{2800x}{100} = 28x$ satıldığından ikinci günün sonunda elinde kalan ürün miktarı $70x - 28x = 42x$ olur.

Bu durumda manav elindeki ürünlerin %42 sini satamamıştır.

ÖRNEK

Bir araç gideceği yolun ilk gün %30 unu, ikinci gün kalan yolun %40 ını gitmiştir. Geriye 252 km yolu kaldığına göre aracın gideceği toplam yolun kaç kilometre olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Aracın gitmesi gereken yol 100x km olsun.

Araç ilk gün yolun $100x \cdot \frac{30}{100} = \frac{3000x}{100} = 30x$ km sini gittiğinden aracın geriye

$100x - 30x = 70x$ km yolu kalır.

İkinci gün kalan yolun $70x \cdot \frac{40}{100} = \frac{2800x}{100} = 28x$ km sini gitmiştir. O hâlde aracın

$70x - 28x = 42x$ km yolu kalır.

Bu durumda $42x = 252 \Rightarrow x = \frac{252}{42} = 6$ olduğundan aracın gitmesi gereken toplam yol

$100x = 100 \cdot 6 = 600$ km bulunur.

ÖRNEK

2020 yılı itibari ile emniyet kemeri takmamanın cezası 132 TL dir. Cezanın tebliğinden itibaren 15 gün içinde ödeme yapanlara %25 indirim yapılmaktadır. Emniyet kemeri takma ihlali yapan bir kişi 15 gün içinde ödeme yaparsa ödeyeceği tutarın kaç TL olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

Cezanın tebliğinden itibaren 15 gün içinde ödeme yapıldığına göre

$132 \cdot \frac{25}{100} = \frac{132 \cdot 25}{100} = \frac{3300}{100} = 33$ TL indirim yapılır.

Bu durumda ödeyeceği tutar $132 - 33 = 99$ TL olur.

Kâr zarar problemlerinde:

- Kâr = Satış fiyatı − Maliyet fiyatı
- Zarar = Maliyet fiyatı − Satış fiyatı
- Kâr yüzdesi $= \frac{\text{Kâr}}{\text{Maliyet fiyatı}} \cdot 100$ eşitliklerinden yararlanılır.

ÖRNEK

%20 kâr ile 288 TL ye satılan bir malın alış fiyatının kaç TL olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Malın alış fiyatı x TL olsun. x TL ye aldığı maldan $x \cdot \frac{20}{100}$ TL kâr edeceğine göre satış fiyatı

$x + x \cdot \frac{20}{100} = 288$ olur. Buradan

$x + x \cdot \frac{20}{100} = 288 \Rightarrow \frac{100x + 20x}{100} = 288 \Rightarrow \frac{120x}{100} = 288 \Rightarrow 120x = 28800$

$\Rightarrow x = 240$ TL bulunur.

ÖRNEK

Maliyeti 500 TL olan bir malın %25 kâr ile kaç TL ye satılacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

Elde edilecek kâr $500 \cdot \frac{25}{100} = 125$ TL olur.

Satış fiyatı, maliyet ve kârın toplamı olacağından $500 + 125 = 625$ TL bulunur.

ÖRNEK

%30 kâr ile 156 TL ye satılan bir malın maliyetinin kaç TL olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Malın maliyeti x olsun. Satış fiyatı maliyet ve kârın toplamı olacağından

$x + x \cdot \frac{30}{100} = 156$ yazabiliriz. Buradan

$$x + x \cdot \frac{3\cancel{0}}{10\cancel{0}} = 156 \Rightarrow \frac{10x + 3x}{10} = 156$$

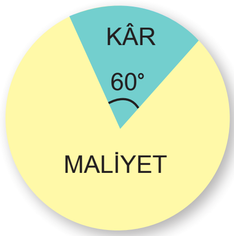
$$\Rightarrow \frac{13x}{10} = 156$$

$$\Rightarrow 13x = 1560$$

$$\Rightarrow x = 120 \text{ TL bulunur.}$$

ÖRNEK

Yanda verilen dairesel grafik, bir mağazada satılan giysilerin maliyeti ile kâr dağılımlarını göstermektedir. Buna göre 108 TL ye satılan bir gömleğin maliyetinin kaç TL olduğunu bulunuz.



ÇÖZÜM

Daire grafiğine göre mağazada satılan giysilerin maliyet fiyatının derecesi $360° - 60° = 300°$ dir. O hâlde gömleğin maliyet fiyatı

360° — 108 TL ise
300° — x TL olur.

D.O.

$$360 \cdot x = 300 \cdot 108$$

$$x = \frac{300 \cdot 108}{360}$$

$$x = \frac{32400}{360} = 90 \text{ TL bulunur.}$$

ÖRNEK

Bir ayakkabı dükkânı sahibi %15 zarar ederek 170 TL ye ayakkabı satmaktadır. Dükkân sahibinin bu ayakkabının satışından %20 kâr elde etmesi için ayakkabıyı kaç TL ye satması gerektiğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Ayakkabının dükkân sahibine maliyeti 100x TL olsun.

Ayakkabı $100x \cdot \frac{15}{100} = 15x$ TL zarar edilerek $100x - 15x = 85x$ TL ye satılmaktadır.

Bu durumda $85x = 170 \Rightarrow \frac{\cancel{85}x}{\cancel{85}} = \frac{170}{85} \Rightarrow x = 2$ bulunur.

O hâlde dükkân sahibine ayakkabının maliyeti $100x = 100 \cdot 2 = 200$ TL dir.

Dükkân sahibinin %20 kâr elde etmesi için $200 \cdot \frac{20}{100} = \frac{200 \cdot 20}{100} = \frac{4000}{100} = 40$

olduğundan ayakkabıyı $200 + 40 = 240$ TL ye satması gerekmektedir.

ÖRNEK

Alış fiyatı 50 TL olan bir mal 32 TL fiyata satılıyor. Buna göre bu malın satışından yüzde kaç zarar edildiğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Malın alış fiyatı 50 TL ve satış fiyatı 32 TL olduğundan malın satışından $50 - 32 = 18$ TL zarar edilmiştir.

50 TL de ⟶ 18 TL zarar edilir ise
100 TL de ⟶ x TL zarar edilir.
D.O.

$$50 \cdot x = 100 \cdot 18$$
$$x = \frac{1800}{50}$$
$$x = 36 \text{ bulunur.}$$

Bu durumda bu malın satışından %36 zarar edilmiştir.

ÖRNEK

Yaş üzüm kurutulduğunda ağırlığının $\frac{1}{5}$ ini kaybeder. Yaş olarak alınıp kuru olarak satıldığında satıcının zarar etmemesi için satış fiyatının yüzde kaç arttırılması gerektiğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Satıcının aldığı yaş üzümün kilogram fiyatı 100 TL olsun.

Her 5 kg yaş üzüm kurutulduğunda $5 \cdot \frac{1}{5} = \frac{\cancel{5}}{\cancel{5}} = 1$ kg ını kaybettiğinden 4 kg kuru üzüm elde edilir.

5 kg yaş üzümün satıcıya maliyeti $5 \cdot 100 = 500$ TL dir. Bu durumda satıcının zarar etmemesi için kuru üzümün kilogramını $\frac{500}{4} = 125$ TL den satması gerekir. O hâlde satış fiyatı %25 arttırılmalıdır.

İşçi problemlerinde, problemlerin çözümünde birim zamanda yapılan iş dikkate alınır.

- Bir işi bir işçi t saatte yaparsa 1 saatte $\frac{1}{t}$ sini yapar.
- Bir işin tamamını birinci işçi a saatte, ikinci işçi b saatte yapabilirken aynı işi ikisi birlikte t saatte yapabiliyorsa $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{t}$ olur.

ÖRNEK

Hakan, bir işi 24 saatte bitirebildiğine göre, Hakan'ın 18 saatte bu işin ne kadarını yapabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Hakan, 1 saatte işin $\frac{1}{24}$ ünü yapar. 18 saatte ise $18 \cdot \frac{1}{24} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$ ünü yapabilir.

ÖRNEK

Hüseyin bir işi tek başına 9 günde, Sedat ise aynı işi tek başına 18 günde bitirebilmektedir. Buna göre, ikisinin birlikte aynı işi kaç günde bitirebileceklerini bulunuz.

ÇÖZÜM

İkisi birlikte çalıştıklarında işi t günde bitirmiş olsunlar.

$$\underset{(2)}{\frac{1}{9}} + \underset{(1)}{\frac{1}{18}} = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{2}{18} + \frac{1}{18} = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{3}{18} = \frac{1}{t} \Rightarrow 3t = 18 \Rightarrow t = 6 \text{ gün bulunur.}$$

Hareket problemlerinde hız ile zamanın çarpımı yolu verir. Bu durumda x: gidilen yol, V: hız ve t: süre olmak üzere $\mathbf{x = V \cdot t}$ olur.

ÖRNEK

Saatte ortalama 110 km/sa. hızla giden bir aracın 4 saatte kaç km yol alacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

x, alınan yol; V, hız; t ise zaman olmak üzere $x = V \cdot t$ eşitliğinde verilenler yerlerine yazılırsa
$x = 110 \cdot 4 \Rightarrow x = 440$ km bulunur.

ÖRNEK

Ortalama 90 km/sa. hızla giden bir aracın 450 km lik bir yolu kaç saatte alacağını bulunuz.

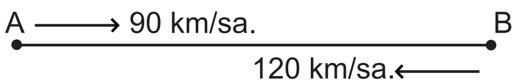
ÇÖZÜM

x, alınan yol; V, hız; t ise zaman olmak üzere $x = V \cdot t$ eşitliğinde verilenler yerlerine yazılırsa
$450 = 90 \cdot t$ olur. Buradan $t = \dfrac{450}{90} \Rightarrow t = 5$ saat bulunur.

ÖRNEK

A kentinden B kentine 90 km/sa. hızla giden bir araç B kentine vardıktan sonra hiç beklemeden 120 km/sa. hızla A kentine geri dönmüştür. Gidiş dönüş toplam 7 saat sürdüğüne göre A kenti ile B kenti arasındaki uzaklığın kaç km olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



A kentinden B kentine giderken geçen süreye t denirse dönüşte geçen süre $7 - t$ olur.
Gidişte alınan yol dönüşte alınan yola eşit olacağından

$$\begin{aligned} 90 \cdot t &= 120 \cdot (7 - t) \\ 90t &= 120 \cdot 7 - 120t \\ 90t + 120t &= 840 \\ 210t &= 840 \\ t &= 4 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Bu durumda iki kent arasındaki uzaklık
$x = V \cdot t = 90 \cdot 4 = 360$ km bulunur.

Bir karışımdaki saf madde miktarı, karıştırılan maddelerdeki saf madde miktarlarının toplamına eşittir.

$$x \cdot \frac{a}{100} + y \cdot \frac{b}{100} = (x + y) \cdot \frac{c}{100} \text{ olur.}$$

ÖRNEK

10 g şeker ile 40 g su karıştırıldığında karışımdaki şeker yüzdesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\text{Şeker oranı} = \frac{\text{Şeker miktarı}}{\text{Karışım miktarı}} = \frac{10}{10 + 40} = \frac{10}{50} = \frac{20}{100} = \%20 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

Tuz oranı % 25 olan 300 litrelik tuz-su karışımındaki su miktarını bulunuz.

ÇÖZÜM

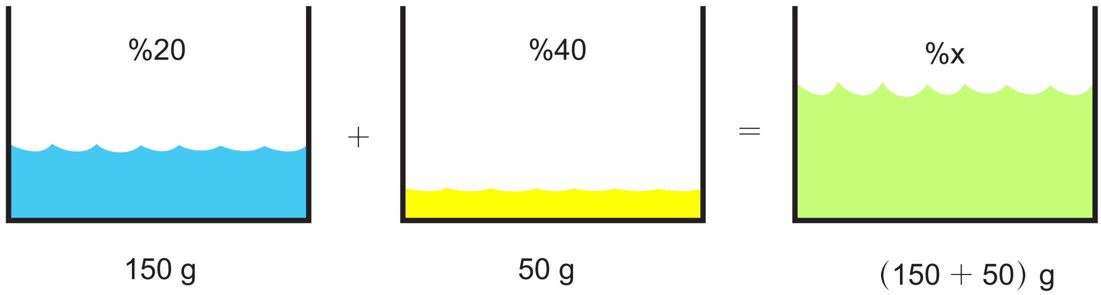
Tuz miktarı %25 ise geriye kalan %75 su miktarıdır. Bu durumda karışımın %75 ini bulmalıyız. $300 \cdot \frac{75}{100} = 225$ litre bulunur.

ÖRNEK

Tuz oranı %20 olan 150 gram tuzlu su ile tuz oranı %40 olan 50 gram tuzlu su karıştırılıyor. Oluşan yeni karışımın tuz oranını bulunuz.

ÇÖZÜM

Yeni karışımın tuz oranına %x diyelim. Karışımlardaki tuz miktarının toplamı yeni karışımdaki tuz miktarına eşit olacağından,



$$150 \cdot \frac{20}{100} + 50 \cdot \frac{40}{100} = 200 \cdot \frac{x}{100}$$

$$30 + 20 = 2x$$

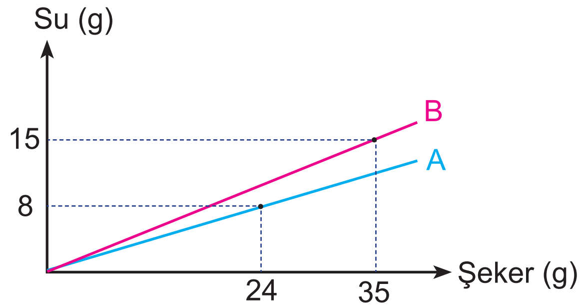
$$50 = 2x$$

$x = 25$ olduğundan yeni karışımın tuz oranı %25 bulunur.

ÖRNEK

Yandaki grafik A ve B karışımlarında bulunan şeker ve su miktarlarını göstermektedir.

Buna göre A ve B karışımlarından eşit miktarda alınarak oluşturulan yeni karışımın şeker oranının yüzdesini bulunuz.



ÇÖZÜM

$$\text{A karışımın şeker oranı} = \frac{\text{Şeker miktarı}}{\text{Karışım miktarı}} = \frac{24}{8+24} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4} = \frac{75}{100} = \%75 \text{ dir.}$$

$$\text{B karışımın şeker oranı} = \frac{\text{Şeker miktarı}}{\text{Karışım miktarı}} = \frac{35}{35+15} = \frac{35}{50} = \frac{70}{100} = \%70 \text{ olur.}$$

A ve B karışımlarından eşit miktarda kullanılarak elde edilecek karışımın şeker oranı A ve B karışımlarının şeker yüzdelerinin aritmetik ortalaması olur.

Bu durumda elde edilecek karışımın şeker oranı

$$\frac{\%75 + \%70}{2} = \%72,5 \text{ bulunur.}$$

ALIŞTIRMALAR

1. "Bir sayının 3 eksiğinin 4 katı sayının kendisine eşittir."
ifadesinin matematiksel ifadesini bulunuz.

2. "Bir sayının 3 fazlasının yarısı, aynı sayının 2 eksiğine eşittir."
ifadesinin matematiksel ifadesini bulunuz.

3. Toplamları 40 olan iki sayının farkı 12 olduğuna göre, küçük olan sayıyı bulunuz

4. İki sayıdan biri, diğerinin 2 katının 1 eksiğidir. Bu iki sayının toplamı 8 olduğuna göre küçük sayıyı bulunuz.

5. 90 sayısının $\frac{4}{5}$ inin $\frac{2}{3}$ ünün kaç olduğunu bulunuz.

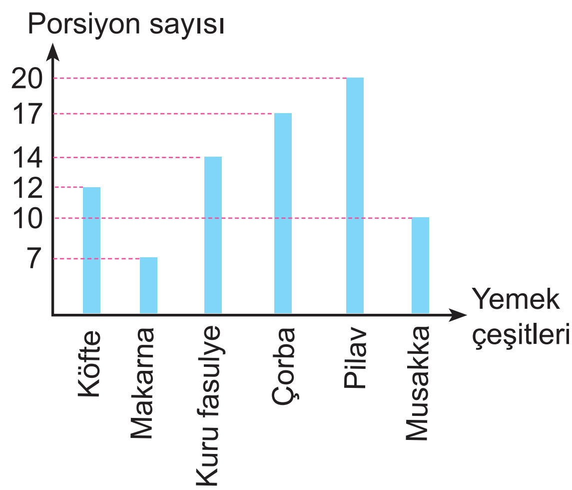
6. Bir annenin yaşı, kızının yaşının 3 katının 2 fazlasıdır. 5 yıl sonra anne 43 yaşında olacağına göre bugün kızının kaç yaşında olduğunu bulunuz.

7. Bir babanın yaşı iki çocuğunun yaşları toplamının 2 katıdır. 9 yıl sonra çocukların yaşları toplamının babanın yaşına oranı $\frac{5}{7}$ olduğuna göre babanın bugünkü yaşını bulunuz.

8. 90 sayısının 150 sayısının yüzde kaçı olduğunu bulunuz.

9. Bir karenin kenarları %20 azaltıldığında alanının yüzde kaç azalacağını bulunuz.

10. Aşağıdaki grafikte bir lokantada hazırlanan yemek çeşitleri ve bir günde satılmış olan porsiyon sayıları verilmiştir.



Buna göre lokantada satılan köfte ve pilavın toplam satılan porsiyon sayısının yüzde kaçı olduğunu bulunuz.

11. Bir yay çekildiğinde boyu %60 uzamaktadır. Uzatılmış durumdaki boyu 80 cm olduğuna göre çekilmeden önceki boyunun kaç cm olduğunu bulunuz.

12. Yaş incir kurutulduğunda ağırlığının %28 ini kaybetmektedir. Yaş incirin kilogramını 10 TL den alan satıcı kurutulduktan sonra kilogramını 25 TL den satıyor. Buna göre satıcının yüzde kaç kâr ettiğini bulunuz.

13. 50 adet yumurtanın tanesini 75 kuruşa alan bir yumurtacı, yumurtaların %60 ının tanesini 120 kuruştan satmıştır. Kalan yumurtalar kırıldığına göre yumurtacının kâr-zarar durumunun ne olduğunu bulunuz.

14. Hasan bir işi tek başına 3 günde, Hasan ile Hüseyin aynı işi birlikte 2 günde bitirebilmektedirler. Buna göre aynı işi Hüseyin'in tek başına kaç günde bitirebileceğini bulunuz.

15. Elif bir işin $\frac{1}{3}$ ünü 8 saatte, Şeyma aynı işin $\frac{1}{4}$ ünü 10 saatte yapabildiğine göre ikisinin birlikte aynı işin tamamını kaç saatte yapabileceklerini bulunuz.

16. Bir aracın 450 km yolu saatte 90 km hızla kaç saatte alabileceğini bulunuz.

17. Bir araç A kentinden B kentine 90 km hızla 8 saatte varmıştır. B kentinden A kentine dönüşte aynı yolu 120 km hızla giden aracın B kentinden A kentine kaç saatte varacağını bulunuz.

18. A ve B şehirleri arasındaki uzaklık 630 km dir. A dan saatteki hızı 120 km ve B den saatteki hızı 90 km olan iki aracın birbirine doğru aynı anda hareket etmeye başladıktan kaç saat sonra karşılaşacaklarını bulunuz.

19. Tuz miktarının su miktarına oranının $\frac{3}{7}$ olduğu tuzlu suyun yüzde kaçının su olduğunu bulunuz.

20. %20 si şeker olan 180 gramlık şekerli su ile %40 ı şeker olan 120 gramlık şekerli su aynı kapta karıştırılırsa oluşan yeni karışımın şeker yüzdesini bulunuz.

21. 16 ayar 20 gram olan bir altın kolye ile 22 ayar 10 gram olan bir altın bilezik eritilerek karıştırılıyor. Karışımdan sonra oluşturulan kolyenin altın ayarının kaç olduğunu bulunuz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

1. $\dfrac{2^{20}+2^{22}+2^{24}}{2^{10}+2^{12}+2^{14}}$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2^{10} B) 2^{11} C) 2^{12} D) 2^{13} E) 2^{14}

2. $5^{-1}+5^{-1}+5^{-1}$ nın $\frac{1}{3}$ ü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{25}$ B) $\frac{1}{5}$ C) 5 D) 25 E) 1

3. $\sqrt{48}-2\sqrt{75}+4\sqrt{108}$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $6\sqrt{3}$ B) $12\sqrt{3}$ C) $18\sqrt{3}$ D) $20\sqrt{3}$ E) $24\sqrt{3}$

4. $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{6}+\sqrt{6}+\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\sqrt{6}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

5. $(\sqrt{2})^4+2(\sqrt[3]{3})^6-(\sqrt[3]{1})$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 4 B) 6 C) 9 D) 15 E) 21

6. $\sqrt{\dfrac{144}{121}}-\sqrt[3]{\dfrac{8}{125}}+\dfrac{6}{55}$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E)1

7. $\underbrace{\bigcirc+\bigcirc+\ldots+\bigcirc}_{25\text{ tane}}=A$ ve $\underbrace{\bigcirc\cdot\bigcirc\cdot\ldots\cdot\bigcirc}_{25\text{ tane}}=B$

eşitlikleri veriliyor.

$\frac{B}{A}=5^{46}$ olduğuna göre $\bigcirc$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 5 C) 25 D) 125 E) 625

8. $2^x+2^x+2^x+2^x+2^x=80$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) {6} B) {5} C) {4} D) {3} E) {2}

9. $(5x+7)^7 = 128$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-1\}$ B) $\{-2\}$ C) $\{0\}$ D) $\{2\}$ E) $\{1\}$

10. $3^{x+1} + 2 \cdot 3^{x+2} - 4 \cdot 3^x = 51$

denklemini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) -3 B) -2 C) -1 D) 0 E) 1

11. $\frac{a}{b} = \frac{5}{7}$ ve $\frac{b}{c} = \frac{3}{8}$ olduğuna göre $\frac{a}{c}$ oranı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{15}{56}$ B) $\frac{15}{52}$ C) $\frac{5}{7}$ D) $\frac{5}{24}$ E) $\frac{5}{8}$

12. a sayısı b sayısı ile doğru orantılıdır. $a = 12$ iken $b = 28$ olduğuna göre $a = 3$ iken b değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

13. Aynı nitelikteki 8 işçi bir apartmanın boya ve badana işlerini 6 günde tamamlamışlardır.

Buna göre aynı nitelikteki 12 işçi aynı işi kaç günde bitirir?

A) 16 B) 12 C) 8 D) 4 E) 2

14. 60 TL yaşları 9, 10 ve 11 olan 3 kardeşe yaşları ile orantılı olarak paylaştırılmak isteniyor.

Buna göre <u>en büyük</u> kardeşin alacağı para kaç TL dir?

A) 18 B) 20 C) 22 D) 24 E) 26

15. Hangi sayının $\frac{1}{3}$ ü ile $\frac{1}{4}$ ünün toplamı 21 dir?

A) 35 B) 36 C) 37 D) 38 E) 39

16. 70 sayısının %60 ının %50 si kaçtır?

A) 21 B) 22 C) 23 D) 24 E) 25

17. 180 TL ye alınan bir mal, 216 TL ye satılırsa yüzde kaç kâr elde edilir?

A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

18. Ahmet, bir işin $\frac{3}{5}$ ini 6 günde yapabildiğine göre tamamını kaç günde yapabilir?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

19. Saatte ortalama 120 km hızla giden bir araç 6 saatte kaç km yol alır?

A) 700 B) 710 C) 720 D) 730 E) 740

20. Merve bir işi tek başına 12 saatte, Ayşe aynı işi tek başına 6 saatte yapabilmektedir.

Buna göre ikisi birlikte aynı işi kaç saatte yapabilirler?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

21. Şeker oranı %40 olan 240 gram şeker su karışımının kaç gramı şekerdir?

A) 94 B) 95 C) 96 D) 97 E) 98

22. $3^0 + 3^1 + 3^2$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

23. $\left(\frac{3}{4}\right)^{2+3a} \cdot \left(\frac{64}{27}\right)^{1+a}$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{27}{64}$ B) $\frac{16}{9}$ C) $\frac{9}{16}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{3}$

24. $6\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - \sqrt{5}$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $8\sqrt{5}$ B) $7\sqrt{5}$ C) $6\sqrt{5}$ D) $5\sqrt{5}$ E) $4\sqrt{5}$

25. $\sqrt[3]{16}+3\sqrt[3]{54}-2\sqrt[3]{128}$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\sqrt[3]{2}$ B) $\sqrt[3]{2}$ C) $2\sqrt[3]{2}$ D) $3\sqrt[3]{2}$ E) $4\sqrt[3]{2}$

26. $-1<x<2$ olmak üzere

$\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt[3]{(1-x)^3}+\sqrt{(x+1)^2}$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-x+4$ B) $-x$ C) $x-4$ D) 4 E) 2

27. $2^{4x+6}=2^{3x-1}$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{7\}$ B) $\{3\}$ C) $\{0\}$ D) $\{-3\}$ E) $\{-7\}$

28. $(4x+2)^4=81$

denklemini çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\left\{-\frac{3}{4}\right\}$ B) $\left\{\frac{1}{4}\right\}$ C) $\left\{\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right\}$ D) $\left\{-\frac{5}{4},\frac{1}{4}\right\}$ E) $\left\{-\frac{5}{4}\right\}$

29. Arda, cebindeki paranın $\frac{3}{7}$ sini harcadığında geriye 60 TL kaldığını görüyor.

Buna göre Arda'nın ilk durumda cebindeki para kaç TL dir ?

A) 90 B) 95 C) 105 D) 120 E) 160

30. Baba 38, kızı 8 yaşındadır.

Buna göre kaç yıl sonra babanın yaşı kızının yaşının 3 katı olur?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

31. Satış fiyatı 270 TL olan bir mal %10 indirim ile kaç TL ye satılır?

A) 240 B) 241 C) 242 D) 243 E) 244

32. a, b ve c sayıları sırasıyla 3, 4 ve 6 ile doğru orantılır.

Buna göre a, b ve c sayıları sırasıyla aşağıdaki sayılardan hangisi ile ters orantılıdır?

A) 4, 3, 6 B) 4, 3, 2 C) 3, 4, 6 D) 3, 4, 2 E) 6, 2, 3

33. Bir sayı önce %20 oranında arttırılır daha sonra %20 oranında azaltılırsa sayıdaki değişim oranı ne olur?

A) %4 azalır B) %4 artar C) % 5 azalır D) %10 azalır E) %10 artar

34. Bir çerezci fındık, badem ve fıstığı ağırlık bakımından sırasıyla 3, 5 ve 7 sayılarıyla orantılı olacak şekilde karıştırarak 5100 gramlık karışık çerez elde ediyor.

Buna göre karışımda kaç gram fındık kullanılmıştır?

A) 2380 B) 2110 C) 1700 D) 1250 E) 1020

35. Beren'in çalışma hızı, Öykü'nün çalışma hızının 4 katıdır. İkisi birlikte bir işi 12 saatte bitirebiliyor.

Buna göre aynı işi Beren tek başına kaç saatte bitirir?

A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

36. Kerem x yaşında iken Eylül 12 yaşındadır. Kerem $2x - 5$ yaşına geldiğinde Eylül $3x - 7$ yaşında olacağına göre Kerem'in bugünkü yaşı kaçtır?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

37. Bir una ağırlığının %30 u kadar su eklenerek hamur elde ediliyor. Oluşturulan hamur 520 gram olduğuna göre kaç gram un kullanılmıştır?

A) 100 B) 200 C) 300 D) 400 E) 500

38. Bir ürünün etiket fiyatı x TL dir. Ürüne %20 indirim yapıldığında ürünün etiket fiyatı $(2x - 12)$ TL olduğuna göre, x kaçtır?

A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

39. Birbirini çeviren iki çarktaki toplam diş sayısı 104 tür. Birinci çark 5 tur attığında ikinci çark 3 tur atıyor.

Buna göre birinci çarktaki diş sayısı kaçtır?

A) 78 B) 65 C) 52 D) 39 E) 13

40. 900 km lik yolun $\frac{2}{5}$ ini saatte 120 km hızla giden bir araç kalan yolu saatte 90 km hızla tamamlamıştır.

Buna göre araç yolun tamamını kaç saatte almıştır?

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15

41. Zeynep ile annesinin yaşları farkı 26 dır. 8 yıl sonra annenin yaşı Zeynep'in yaşının 3 katının 2 eksiği olduğuna göre annenin bugünkü yaşı kaçtır?

A) 28 B) 30 C) 32 D) 35 E) 40

42. Aşağıda numaralar ile verilen işlemleri harf ile verilen ifadelerle eşleştiriniz.

I. $\dfrac{5^{16} \cdot 25^{-2}}{125^3}$

II. $125^3 : \left(\dfrac{1}{5}\right)^8$

III. $\dfrac{8\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}$

IV. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \sqrt{6}$

V. $\sqrt[3]{125} + 3\sqrt[4]{81} - 2\sqrt[5]{32}$

a) 5^{17}

b) 2

c) 8

ç) 5^3

d) 10

e) 5^7

f) 4

43. Aşağıda numaralar ile verilen denklemleri harf ile verilen çözüm kümeleri ile eşleştiriniz.

I. $(3x - 7)^5 = 32$

II. $\dfrac{3^x \cdot 3^x \cdot 3^x}{3^x + 3^x + 3^x} = 27$

III. $\sqrt[4]{27^{x-1}} = \sqrt[3]{3^{2x+1}}$

IV. $(3x - 1)^8 = (x + 3)^8$

V. $(x - 3)^{x+1} = 1$

a) $\{13\}$

b) $\left\{-\dfrac{1}{2}, 2\right\}$

c) $\{8\}$

ç) $\{3\}$

d) $\{-1, 4\}$

e) $\{2\}$

f) $\{-1, 2, 4\}$

44 ve 45. soruları aşağıdaki verilen bilgilere göre cevaplayınız.

Elektronik atık geri dönüşüm şirketi kullanım ömrünü tamamlamış elektronik eşyaları ayrıştırıp cinsine göre kırma tesisinde kırıp içerisindeki zararlı maddeleri ayrıştırdıktan sonra altın, gümüş ve demir gibi maddeleri tekrar ekonomiye kazandırmaktadır.

Görsel 1.3

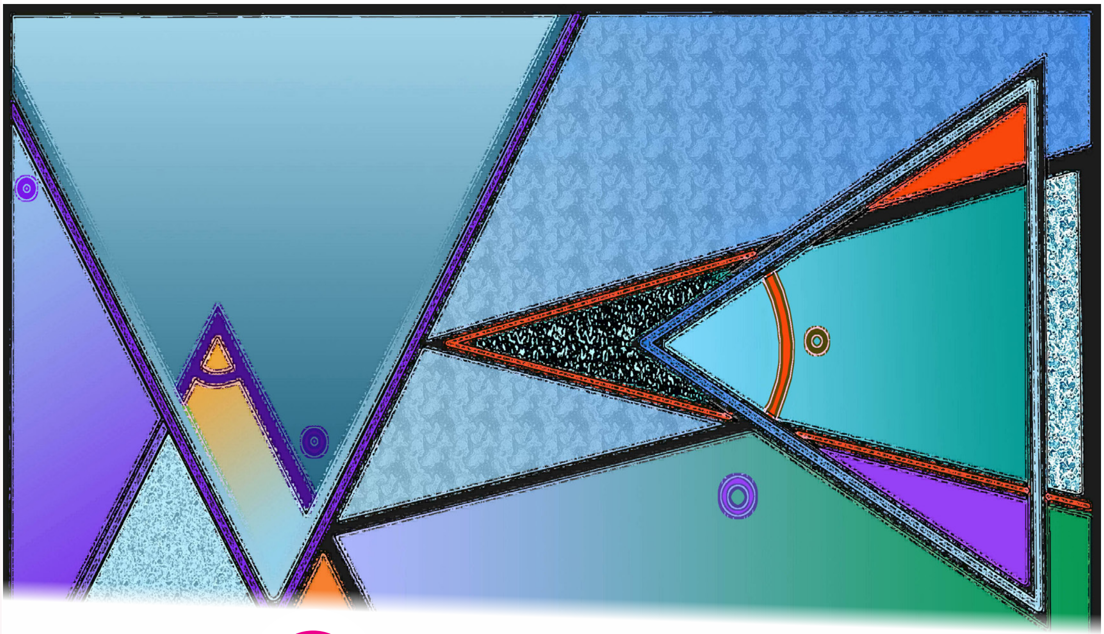
- Bir ton cep telefonu içerisinden yaklaşık 400 gram
- Bir ton bilgisayarın ana kartından yaklaşık 100 gram altın elde edilir.

Bir geri dönüşüm şirketinde bir ayda 1 ton cep telefonu atığı ile 1 ton bilgisayar ana kart atığı tekrar ekonomiye kazandırılmaktadır.

44. Bir gram altın 440 TL olduğuna göre bu şirketin bir ayda dönüşümden elde ettiği kazancın yaklaşık olarak kaç TL olduğunu bulunuz.

45. Bu ürünlerin geri dönüşüm maliyeti 110 000 TL olduğuna göre bu şirketin dönüşümden bir ayda yaklaşık olarak yüzde kaç kâr ettiğini bulunuz.

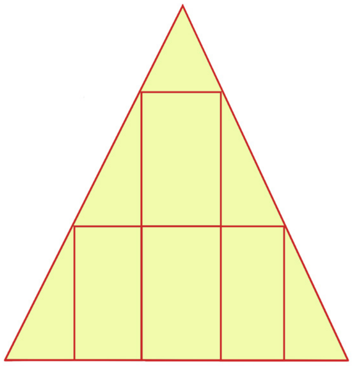
ÜÇGENLER



2. ÜÇGENLER

2.1. ÜÇGENLERDE TEMEL KAVRAMLAR

HAZIRLIK ÇALIŞMALARI



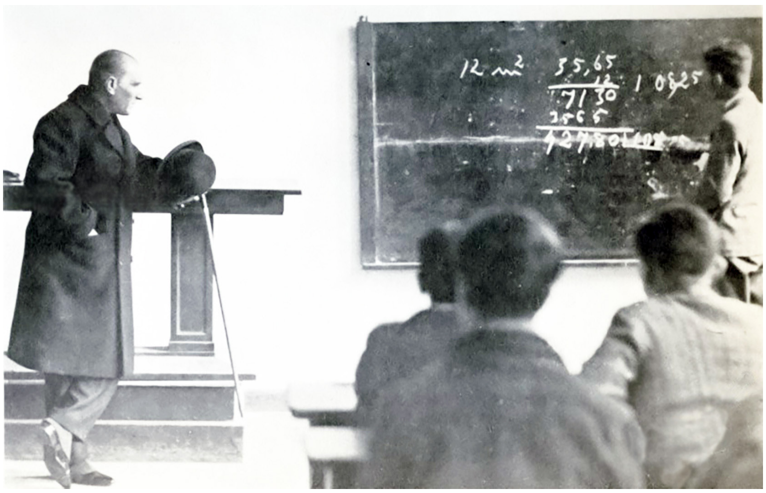
1. Yanda verilen şekil hangi geometrik şekiller kullanılarak oluşturulmuştur?

2. Yanda verilen şekilde toplam kaç tane üçgen vardır?

3. Yanda verilen şekilde ne çeşit üçgenler vardır?

Geometri, düzlemsel şekillerin özelliklerini ve aralarındaki bağıntıları inceleyen matematik dalıdır. Doğru, açı, üçgen, kare, beşgen, koni, küre, prizma gibi birçok terim geometrinin inceleme alanına girmektedir.

Geometrinin çok eski çağlardan beri var olduğu bilinmektedir. İlk olarak Eski Mısır'da rastlanan geometri, Mezopotamya uygarlıklarının kil tabletlerinde de görülmektedir. Eski Yunanlılar geometriyi sistemleştirip geliştirmişlerdir. Thales (Tales), Euclides (Öklid) ve Phythagoras (Pisagor) en çok bilinen Yunan bilim insanlarıdır. Türk-İslam dünyası alimlerinden olan Harezmi, Ömer Hayyam, Sabit Bin Kurra, Ebu'l Vefa gibi bilim insanları geometrinin gelişimine büyük katkılar sağlamıştır.



Görsel 2.1

Gazi Mustafa Kemal ATATÜRK de ölümünden bir yıl önce 44 sayfalık bir geometri kitabı kaleme almıştır. Bu kitap 1937'de Millî Eğitim Bakanlığı tarafından yayımlanmıştır. Bugün kullanılan açı, üçgen, çember, yarıçap, yamuk, eğri, köşe, küre gibi birçok terim Atatürk tarafından türetilmiştir. Bununla birlikte geometride kullanılan Osmanlıca terimler sadeleştirilip Türkçeleştirilmiştir.

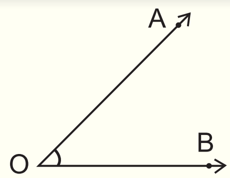
Kaynak: İslam Ansiklopedisi, Cilt 35, Sayfa 355 - Cilt 41, Sayfa 442, 445
Türk Dil Kurumu Yayınları: 333, Geometri, Mustafa Kemal Atatürk

2.1.1. Üçgenlerde Açı Özellikleri

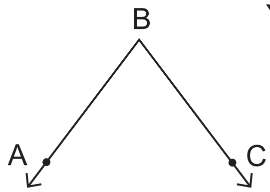
Paralel İki Doğrunun Bir Kesenle Yaptığı Açı

Açı ve Açı Çeşitleri

Başlangıç noktaları aynı olan iki ışının birleşimine **açı** denir. İki ışının ortak olan başlangıç noktası, açının köşesidir. Işınlara, **açının kolları** veya **açının kenarları** denir.
OA ve OB ışınları bir açı oluşturacak şekilde birleştirildiğinde oluşan açı $\widehat{BOA}$ veya $\widehat{AOB}$ veya $\widehat{O}$ biçiminde gösterilir.



ÖRNEK



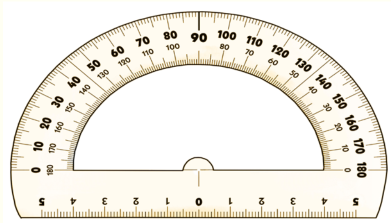
Yanda verilen geometrik şekildeki açıyı sembolle gösteriniz.

ÇÖZÜM

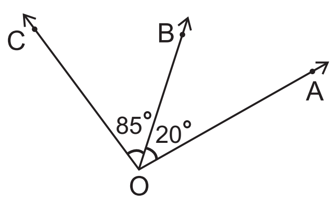
Yukarıda verilen açının köşesi B dir. Bu nedenle açı sembolle gösterilirken B noktası ortada veya tek olarak yazılmalıdır.
Bu durumda açının sembolle gösterimi $\widehat{ABC}$, $\widehat{CBA}$ veya $\widehat{B}$ şeklindedir.

Açının Ölçüsü

Açıyı oluşturan iki ışın arasındaki açıklığa **açının ölçüsü** denir. Açının ölçüsü açı ölçer yardımıyla ölçülür. Açı ölçü birimlerinden en yaygın olarak kullanılan ölçü birimi derecedir. Açıya karşılık gelen sayının sağ üst köşesine " ° " sembolü konularak gösterilir. Herhangi bir A açısının ölçüsü $m(\widehat{A})$ ile gösterilir.

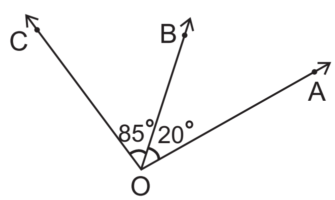


ÖRNEK



Yanda verilen şekilde $m(\widehat{AOB}) = 20°$ ve $m(\widehat{BOC}) = 85°$ olduğuna göre $\widehat{AOC}$ nın ölçüsü kaç derecedir?

ÇÖZÜM



Yanda verilen şekilde $m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC})$ olur.

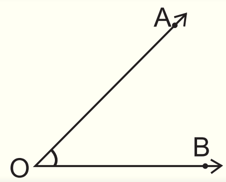
$m(\widehat{AOB}) = 20°$ ve $m(\widehat{BOC}) = 85°$ olduğundan

$m(\widehat{AOC}) = 20° + 85° = 105°$ bulunur.

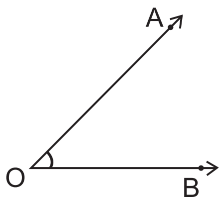
Açı Çeşitleri

1. Dar Açı

Ölçüsü 0° ile 90° arasında olan açıya **dar açı** denir.
$0^\circ < m(\widehat{AOB}) < 90^\circ$ olur. $\widehat{AOB}$ nın gösterimi yandaki gibidir.



ÖRNEK



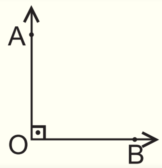
Yanda verilen $\widehat{AOB}$ dar açı olduğuna göre ölçüsünün tam sayı olarak en fazla kaç derece olabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

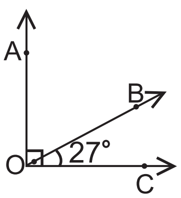
$\widehat{AOB}$ dar açı olduğundan ölçüsü 0° ile 90° arasında olmalıdır. Bu durumda $\widehat{AOB}$ nın ölçüsünün alabileceği en büyük değer tam sayı olarak 89° olur.

2. Dik Açı

Ölçüsü 90° olan açıya **dik açı** denir.
Yandaki $\widehat{AOB}$ nda $[OA \perp [OB$ olup $m(\widehat{AOB}) = 90^\circ$ olur.



ÖRNEK



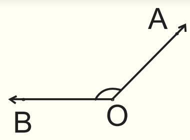
Yanda verilen şekilde $[OA \perp [OC$ ve $m(\widehat{COB}) = 27^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{BOA})$ kaç derecedir?

ÇÖZÜM

$[OA \perp [OC$ olduğundan $m(\widehat{COA}) = 90^\circ$ dir. $m(\widehat{COA}) = m(\widehat{BOA}) + m(\widehat{COB})$ eşitliğinde $m(\widehat{COA}) = 90^\circ$ ve $m(\widehat{COB}) = 27^\circ$ değerleri yerlerine yazılırsa $m(\widehat{BOA}) = 90^\circ - 27^\circ = 63^\circ$ bulunur.

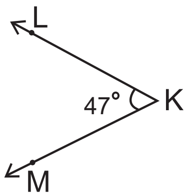
3. Geniş Açı

Ölçüsü 90° ile 180° arasında olan açıya **geniş açı** denir.
$90^\circ < m(\widehat{AOB}) < 180^\circ$ olur. $\widehat{AOB}$ nın gösterimi yandaki gibidir.

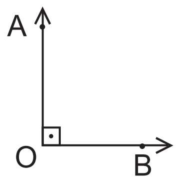


ÖRNEK

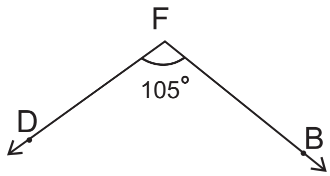
I.



II.



III.



Yukarıda verilen açıların türünü bulunuz.

ÇÖZÜM

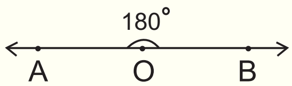
I. $m(\widehat{LKM}) = 47^\circ$ dir. $0^\circ < 47^\circ < 90^\circ$ olduğundan $\widehat{LKM}$ dar açıdır.

II. $m(\widehat{AOB}) = 90^\circ$ olduğundan $\widehat{AOB}$ dik açıdır.

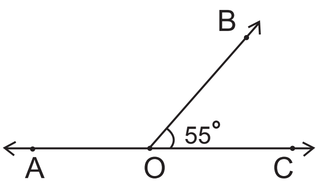
III. $m(\widehat{DFB}) = 105^\circ$ dir. $90^\circ < 105^\circ < 180^\circ$ olduğundan $\widehat{DFB}$ geniş açıdır.

4. Doğru Açı

Ölçüsü 180° olan açıya **doğru açı** denir. $m(\widehat{AOB}) = 180^\circ$ olur.
$\widehat{AOB}$ nın gösterimi yandaki gibidir.

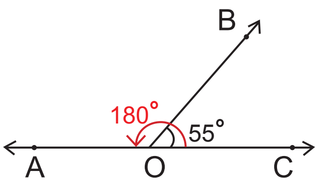


ÖRNEK



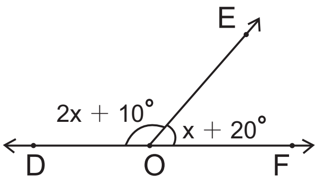
Yanda verilen şekilde A, O ve C noktaları doğrusaldır.
(Aynı doğru üzerindedir.)
$m(\widehat{BOC}) = 55^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{AOB})$ kaç derecedir?

ÇÖZÜM



A, O ve C doğrusal olduğundan $m(\widehat{AOC}) = 180^\circ$ (doğru açı) olur.
$m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AOC}) - m(\widehat{BOC})$ olduğundan
$m(\widehat{AOB}) = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$ bulunur.

ÖRNEK



Şekilde D, O ve F noktaları doğrusaldır.

$m(\widehat{EOF}) = x + 20°$

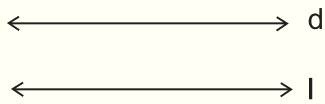
$m(\widehat{EOD}) = 2x + 10°$ olduğuna göre x kaç derecedir?

ÇÖZÜM

D, O ve F noktaları doğrusal olduğundan $m(\widehat{DOF}) = 180°$ ve $m(\widehat{EOD}) + m(\widehat{EOF}) = m(\widehat{DOF})$ olur. Bu durumda

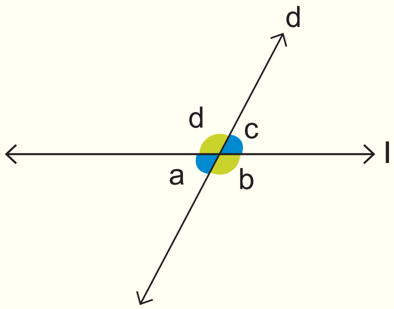
$$2x + 10° + x + 20° = 180° \Rightarrow 3x + 30° = 180°$$
$$\Rightarrow 3x = 150°$$
$$\Rightarrow x = 50° \text{ bulunur.}$$

Birbirine paralel d ve l doğruları aşağıdaki gibidir.



d // l biçiminde gösterilir.

d ve l gibi iki doğrunun kesişmesiyle aşağıdaki açılar oluşur.



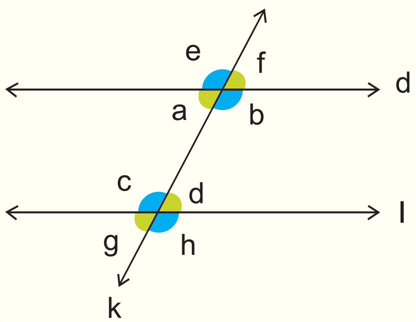
d ve l doğrularının kesişmesiyle oluşan karşılıklı açılara **ters açılar** denir. Ters açıların ölçüleri eşittir.

Şekildeki turuncu ile gösterilen b ve d açıları, mavi ile gösterilen a ve c açıları ters açılardır.

Bu durumda

a = c ve b = d olur.

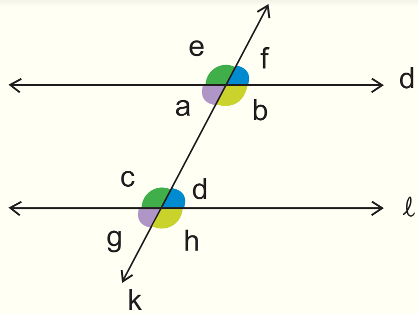
Birbirine paralel d ve l doğruları bir k doğrusu ile kesildiğinde aşağıdaki açılar oluşur.



İki paralel doğru bir kesenle kesildiğinde aynı yöne bakan açılara **yöndeş açılar** denir. Yöndeş açıların ölçüleri eşittir.

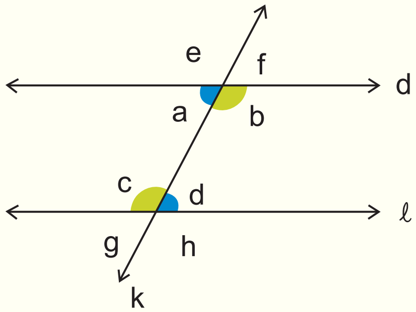
Yanda verilen şekilde a ile g, b ile h, c ile e ve d ile f yöndeş açılardır. Bu durumda

$a = g$, $c = e$, $b = h$ ve $d = f$ olur.



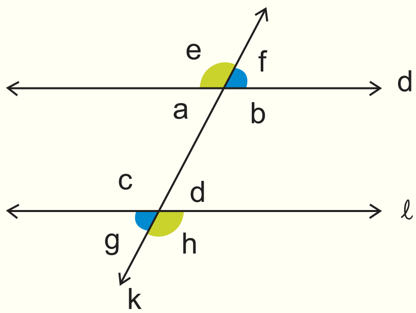
İki paralel doğrunun bir kesenle yaptığı açılardan bu paralel iki doğru arasında kalan açılara **iç açılar** denir. Kesenin farklı taraflarında olan ve komşu olmayan açılara **iç ters açılar** denir. İç ters açıların ölçüleri eşittir.

Yanda verilen şekilde a ile d ve b ile c iç ters açılardır. Bu durumda $a = d$ ve $b = c$ olur.

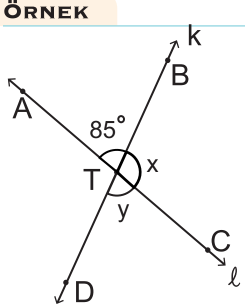


İki paralel doğrunun bir kesenle oluşturduğu açılardan bu iki paralel doğru arasında olmayan açılara **dış açılar** denir. Kesenin farklı tarafında bulunan komşu olmayan dış açılara **dış ters açılar** denir. Dış ters açıların ölçüleri eşittir.

Yanda verilen şekilde e ile h ve f ile g dış ters açılardır. Bu durumda $e = h$ ve $f = g$ olur.



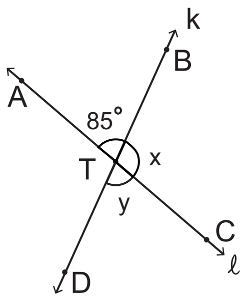
ÖRNEK



Yanda verilen şekilde k ve ℓ doğruları bir T noktasında kesişmektedir.

$m(\widehat{ATB}) = 85°$, $m(\widehat{BTC}) = x$ ve $m(\widehat{DTC}) = y$ olduğuna göre $x - y$ kaç derecedir?

ÇÖZÜM



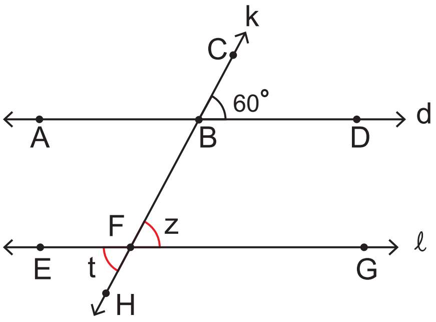
$\widehat{ATB}$ ve $\widehat{DTC}$ ters açılar olduğundan ölçüleri eşittir. O hâlde $m(\widehat{DTC}) = m(\widehat{ATB})$ olduğundan $y = 85°$ olur.

$\widehat{ATC}$ doğru açı olduğundan

$$m(\widehat{ATB}) + m(\widehat{BTC}) = 180° \Rightarrow 85° + x = 180°$$
$$\Rightarrow x = 180° - 85°$$
$$\Rightarrow x = 95° \text{ olur.}$$

Bu durumda $x - y = 95° - 85° = 10°$ bulunur.

ÖRNEK



Yandaki şekilde

$d \parallel \ell$, $d \cap k = B$ ve $\ell \cap k = F$

$m(\widehat{CBD}) = 60°$

olduğuna göre $m(\widehat{BFG}) + m(\widehat{EFH})$ kaç derecedir?

ÇÖZÜM

$\widehat{CBD}$ ve $\widehat{BFG}$ yöndeş açılardır ve yöndeş açıların ölçüleri eşit olduğundan

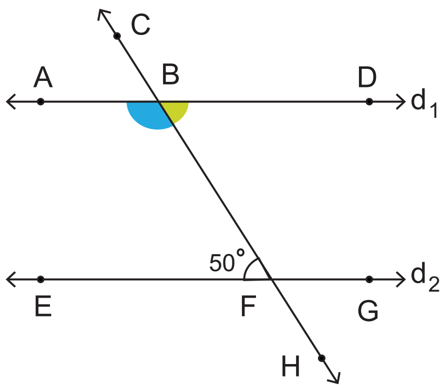
$m(\widehat{CBD}) = m(\widehat{BFG}) = 60°$ olur.

$\widehat{BFG}$ ve $\widehat{EFH}$ ters açılardır ve ters açıların ölçüleri eşit olduğundan

$m(\widehat{BFG}) = m(\widehat{EFH}) = 60°$ olur.

Bu durumda $m(\widehat{BFG}) + m(\widehat{EFH}) = 60° + 60° = 120°$ bulunur.

ÖRNEK



Yanda verilen şekilde $d_1 \parallel d_2$ dir. HC doğrusu d_1 ve d_2 doğrularını sırasıyla B ve F noktalarında kesmektedir. $m(\widehat{EFB}) = 50°$ olduğuna göre $\widehat{DBF}$ ve $\widehat{ABF}$ nın ölçüsü kaç derecedir?

ÇÖZÜM

$d_1 \parallel d_2$ ve $\widehat{EFB}$ ile $\widehat{DBF}$ iç ters açılar olduğundan ölçüleri eşittir. O hâlde

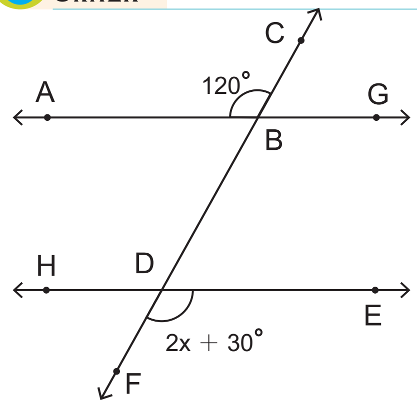
$m(\widehat{EFB}) = m(\widehat{DBF}) = 50°$ olur.

A, B ve D noktaları d_1 doğrusu üzerinde olduğundan $m(\widehat{ABF}) + m(\widehat{DBF}) = 180°$ olur.

Bu durumda $m(\widehat{ABF}) + 50° = 180° \Rightarrow m(\widehat{ABF}) = 180° - 50°$

$\Rightarrow m(\widehat{ABF}) = 130°$ bulunur.

ÖRNEK



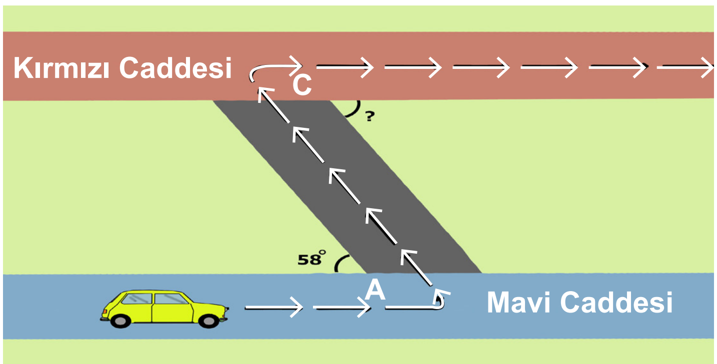
Yanda verilen şekilde $AG \parallel HE$, $m(\widehat{FDE}) = 2x + 30°$ ve $m(\widehat{ABC}) = 120°$ olduğuna göre x kaç derecedir?

ÇÖZÜM

$\widehat{FDE}$ ve $\widehat{ABC}$ dış ters açılar olduğundan $m(\widehat{FDE}) = m(\widehat{ABC})$ olur. Bu durumda

$$2x + 30° = 120° \Rightarrow 2x = 120° - 30°$$
$$\Rightarrow 2x = 90°$$
$$\Rightarrow x = 45° \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK



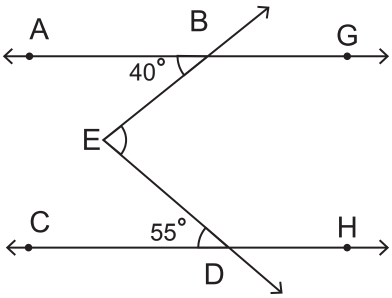
Görsel 2.2

Yukarıdaki görselde Mavi Caddesi üzerinde gösterilen araç, ok yönünde ilerleyerek Kırmızı Caddesi'ne ulaştıktan sonra yine ok yönünde Mavi Caddesi'ne paralel olan Kırmızı Caddesi'nde yoluna devam edecektir. A köşesindeki dar açının ölçüsü $58°$ olduğuna göre C köşesindeki dar açının ölçüsü kaç derecedir?

ÇÖZÜM

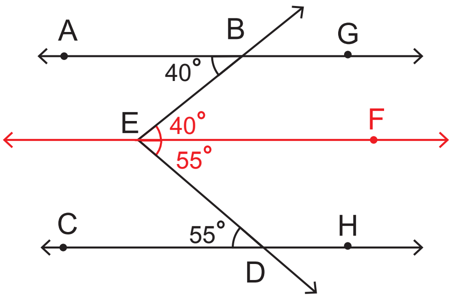
Kırmızı Cadde ve Mavi Cadde birbirine paralel olduğundan A ve C köşelerindeki dar açılar, iç ters açılardır. İç ters açıların ölçüleri eşit olduğundan $m(\widehat{A}) = m(\widehat{C}) = 58°$ bulunur.

ÖRNEK



Yanda verilen şekilde AG // CH, $m(\widehat{ABE}) = 40°$ ve $m(\widehat{EDC}) = 55°$ olduğuna göre $m(\widehat{BED})$ kaç derecedir?

ÇÖZÜM

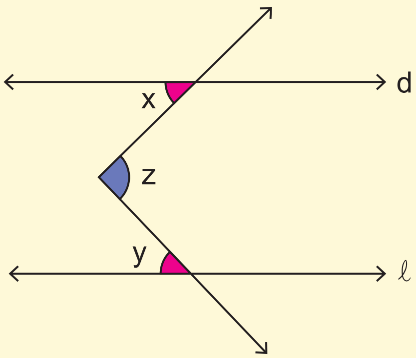


E noktasından geçen AG // CH // EF olacak şekilde EF doğrusu çizilirse $\widehat{ABE}$ ve $\widehat{BEF}$ iç ters açılar olduğundan ölçüleri eşit ve $m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{BEF}) = 40°$ olur.

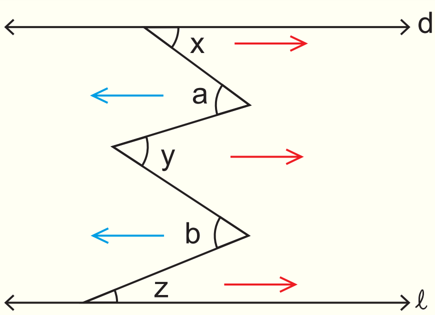
$\widehat{FED}$ ve $\widehat{EDC}$ iç ters açılar olduğundan ölçüleri eşit ve $m(\widehat{FED}) = m(\widehat{EDC}) = 55°$ olur. Bu durumda

$$m(\widehat{BED}) = m(\widehat{BEF}) + m(\widehat{FED}) \Rightarrow m(\widehat{BED}) = 40° + 55°$$
$$\Rightarrow m(\widehat{BED}) = 95° \text{ bulunur.}$$

SONUÇ



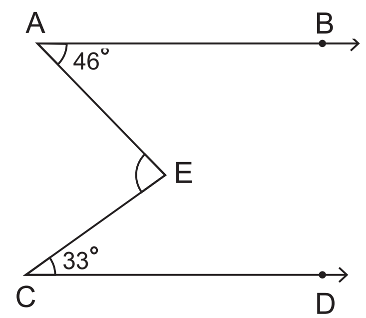
$d \,//\, \ell$ ise $z = x + y$ olur.



$d \,//\, \ell$ ise şekildeki kırmızı oklarla gösterilen sağa bakan açıların ölçülerinin toplamı, mavi oklarla gösterilen sola bakan açıların ölçülerinin toplamına eşittir.

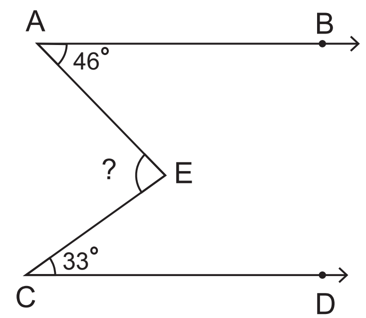
$x + y + z = a + b$ olur.

ÖRNEK



Yanda verilen şekilde $[AB \parallel [CD$, $m(\widehat{BAE}) = 46°$ ve $m(\widehat{ECD}) = 33°$ olduğuna göre $\widehat{AEC}$ nın ölçüsü kaç derecedir?

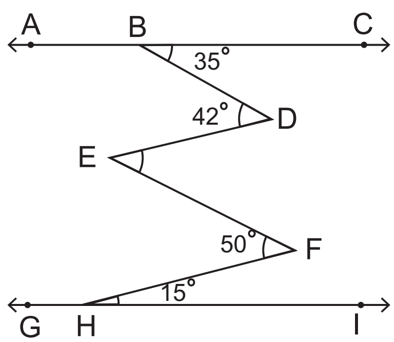
ÇÖZÜM



$[AB \parallel [CD$ olduğundan $m(\widehat{AEC}) = m(\widehat{BAE}) + m(\widehat{ECD})$ olur.

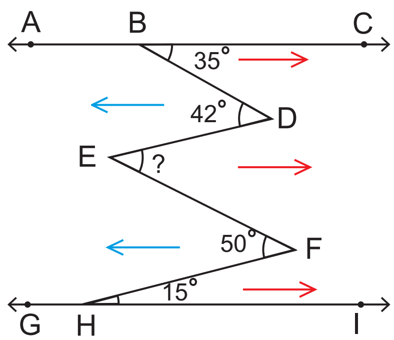
Bu durumda $m(\widehat{AEC}) = 46° + 33° = 79°$ bulunur.

ÖRNEK



Yanda verilen şekilde $AC \parallel GI$, $m(\widehat{CBD}) = 35°$, $m(\widehat{BDE}) = 42°$, $m(\widehat{EFH}) = 50°$ ve $m(\widehat{FHI}) = 15°$ olduğuna göre $m(\widehat{DEF})$ kaç derecedir?

ÇÖZÜM



$AC \parallel GI$ olduğundan sağa bakan açıların ölçülerinin toplamı sola bakan açıların ölçülerinin toplamına eşittir.

Bu durumda

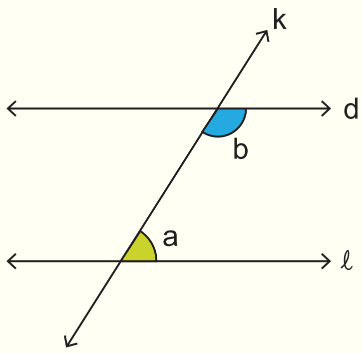
$$m(\widehat{CBD}) + m(\widehat{DEF}) + m(\widehat{FHI}) = m(\widehat{BDE}) + m(\widehat{EFH})$$

$$35° + m(\widehat{DEF}) + 15° = 42° + 50°$$

$$50° + m(\widehat{DEF}) = 92°$$

$$m(\widehat{DEF}) = 92° - 50°$$

$m(\widehat{DEF}) = 42°$ bulunur.



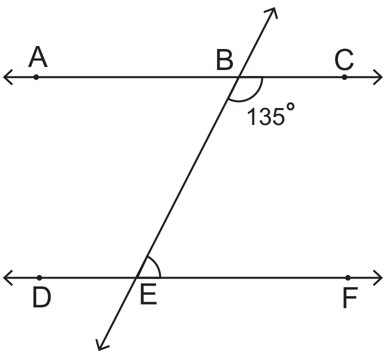
$d \parallel \ell$ olmak üzere d ve ℓ doğruları k doğrusu ile kesildiğinde d ve ℓ doğruları arasında kalan ve birbirine bakan açılara **karşı durumlu açılar** denir.

Karşı durumlu açılar birbirinin bütünleridir.
Yandaki şekilde $d \parallel \ell$ olduğundan

$$a + b = 180°$$

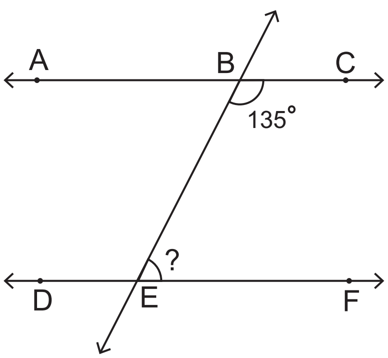
olur.

ÖRNEK



Yanda verilen şekilde $AC \parallel DF$, $m(\widehat{CBE}) = 135°$ olduğuna göre $m(\widehat{BEF})$ kaç derecedir?

ÇÖZÜM

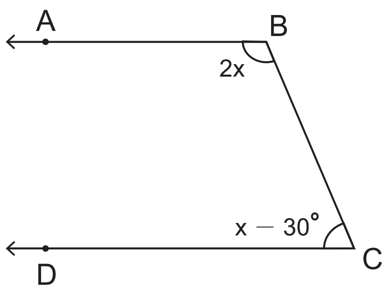


$AC \parallel DF$ olduğundan $m(\widehat{CBE}) + m(\widehat{BEF}) = 180°$ olur.
Bu durumda

$$135° + m(\widehat{BEF}) = 180° \Rightarrow m(\widehat{BEF}) = 180° - 135°$$

$$\Rightarrow m(\widehat{BEF}) = 45° \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK



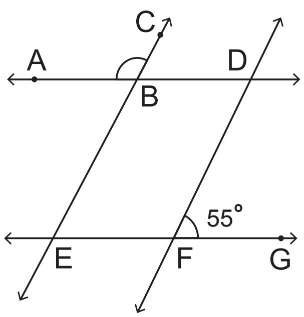
$[BA \parallel [CD$, $m(\widehat{ABC}) = 2x$ ve $m(\widehat{BCD}) = x - 30°$ olduğuna göre x kaç derecedir?

ÇÖZÜM

$[BA \parallel [CD$ ise $m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{BCD}) = 180°$ olur. Bu durumda

$$2x + x - 30° = 180° \Rightarrow 3x - 30° = 180°$$
$$\Rightarrow 3x = 180° + 30°$$
$$\Rightarrow 3x = 210°$$
$$\Rightarrow x = 70° \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK



$AD \parallel EG$, $CE \parallel DF$ ve $m(\widehat{DFG}) = 55°$ olduğuna göre $m(\widehat{ABC})$ kaç derecedir?

ÇÖZÜM

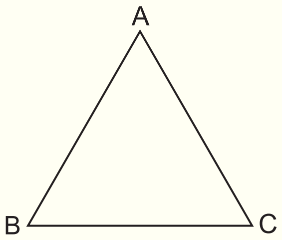
E, F ve G doğrusal olduğundan $m(\widehat{EFD}) + m(\widehat{DFG}) = 180°$ dir. O hâlde

$$m(\widehat{EFD}) + 55° = 180° \Rightarrow m(\widehat{EFD}) = 180° - 55°$$
$$\Rightarrow m(\widehat{EFD}) = 125° \text{ olur.}$$

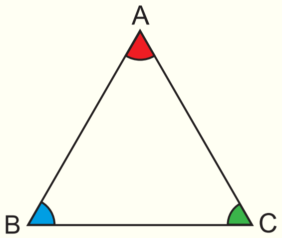
$\widehat{ABC}$ ve $\widehat{EFD}$ yöndeş açılar olduğundan $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{EFD}) = 125°$ bulunur.

2. ÜNİTE: ÜÇGENLER

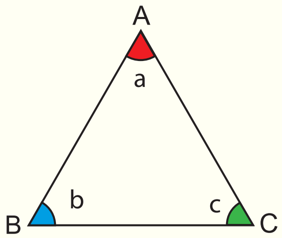
Üçgende Açı Özellikleri



A, B ve C doğrusal olmayan üç nokta olmak üzere [AB], [BC] ve [AC] doğru parçalarının birleşim kümesine **üçgen** denir ve $\widehat{ABC}$ şeklinde gösterilir. Şekildeki ABC üçgeni $[AB] \cup [BC] \cup [AC]$ kümesi ile elde edilmiştir.

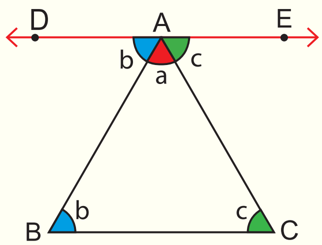


$\widehat{ABC}$ nin köşeleri A, B ve C noktalarıdır.
$\widehat{ABC}$ nin kenarları [AB], [BC] ve [AC] dır.
$\widehat{ABC}$ nin kenar uzunlukları $|AB|$, $|BC|$ ve $|AC|$ dur.
$\widehat{ABC}$ nin iç açıları $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$ ve $\widehat{BAC}$ dır.



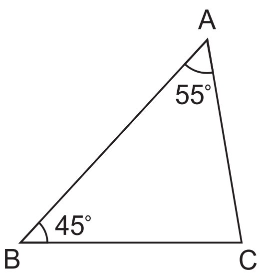
Bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° dir.

Yandaki $\widehat{ABC}$ ninde $a + b + c = 180^\circ$ olur.



A noktasından geçen [BC] na paralel bir doğru çizilirse
$m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{CAE}) = c$ (iç ters açılar)
$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{BAD}) = b$ (iç ters açılar) olur.
Bu durumda $a + b + c = 180^\circ$ (doğru açı) bulunur.
Böylece üçgenin iç açılarının ölçülerinin toplamının 180° olduğu görülür.

ÖRNEK



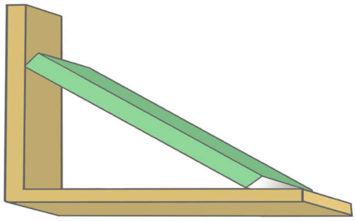
ABC üçgeninde $m(\widehat{BAC}) = 55^\circ$ ve $m(\widehat{ABC}) = 45^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{BCA})$ kaç derecedir?

ÇÖZÜM

Bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° olduğundan
$m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{BCA}) = 180^\circ$ olur. Bu durumda

$$55^\circ + 45^\circ + m(\widehat{BCA}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{BCA}) = 180^\circ - 100^\circ$$
$$\Rightarrow m(\widehat{BCA}) = 80^\circ \text{ bulunur.}$$

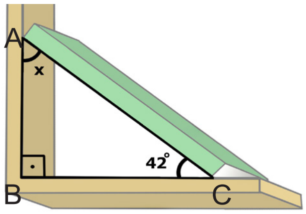
ÖRNEK



Görsel 2.3

Dik bir rafta şekildeki gibi eğik duran bir kitabın, rafın tabanıyla yaptığı açının ölçüsü 42° olduğuna göre kitabın, rafın yan tarafıyla yaptığı dar açının ölçüsü kaç derecedir?

ÇÖZÜM



Görsel 2.4

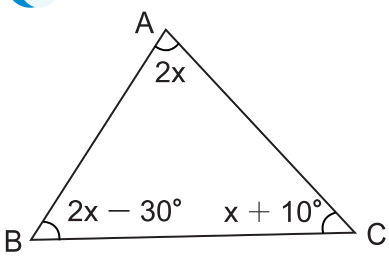
Şekildeki ABC üçgeninde $m(\widehat{B}) = 90^\circ$ ve $m(\widehat{C}) = 42^\circ$ dir. $m(\widehat{A}) = x$ olsun. Bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° olduğundan $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ$ olur. Bu durumda

$$x + 90^\circ + 42^\circ = 180^\circ \Rightarrow x + 132^\circ = 180^\circ$$
$$\Rightarrow x = 180^\circ - 132^\circ$$
$$\Rightarrow x = 48^\circ \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

Bir ABC üçgeninde $m(\widehat{A}) = 2x$, $m(\widehat{B}) = 2x - 30^\circ$ ve $m(\widehat{C}) = x + 10^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{A})$ kaç derecedir?

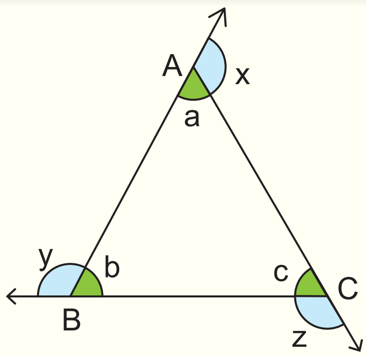
ÇÖZÜM



Bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° olduğundan $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ$ olur. O hâlde

$$2x + 2x - 30^\circ + x + 10^\circ = 180^\circ \Rightarrow 5x - 20^\circ = 180^\circ$$
$$\Rightarrow 5x = 200^\circ$$
$$\Rightarrow x = 40^\circ \text{ elde edilir.}$$

Bu durumda $m(\widehat{A}) = 2x = 80^\circ$ bulunur.



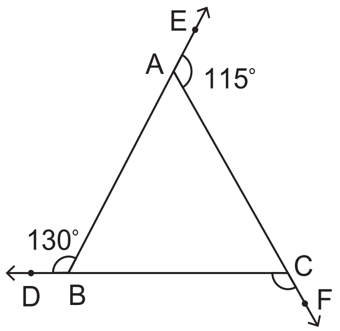
- Şekildeki gibi üçgenin her bir köşesinden bir doğru parçasının uzatılmasıyla elde edilen ve ölçüleri x, y ve z olan açılara üçgenin **dış açıları** denir.
- Bir üçgenin dış açıların ölçüleri toplamı 360° dir. $x + y + z = 360^\circ$
- Üçgenin bir dış açısıyla bu açıya komşu bir iç açısının ölçüsünün toplamı 180° dir. $a + x = 180^\circ$, $b + y = 180^\circ$, $c + z = 180^\circ$

$a + x = 180^\circ$, $b + y = 180^\circ$ ve $c + z = 180^\circ$ eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa $a + b + c + x + y + z = 540^\circ$ olur. $a + b + c = 180^\circ$ olduğundan

$$180^\circ + x + y + z = 540^\circ \Rightarrow x + y + z = 540^\circ - 180^\circ$$
$$\Rightarrow x + y + z = 360^\circ \text{ olur.}$$

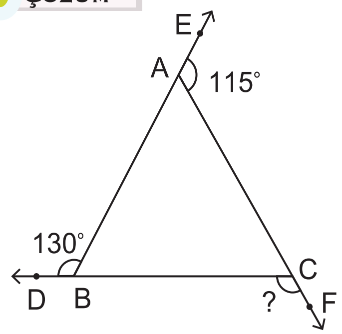
Böylece üçgenin dış açılarının ölçüleri toplamının 360° olduğu görülür.

ÖRNEK



ABC üçgeninde $m(\widehat{DBA}) = 130°$ ve $m(\widehat{EAC}) = 115°$ olduğuna göre $m(\widehat{BCF})$ kaç derecedir?

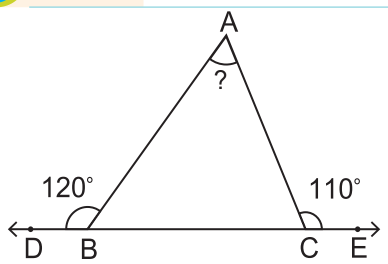
ÇÖZÜM



Bir üçgenin dış açılarının ölçüleri toplamı $360°$ olduğundan $m(\widehat{EAC}) + m(\widehat{DBA}) + m(\widehat{BCF}) = 360°$ olur. Bu durumda

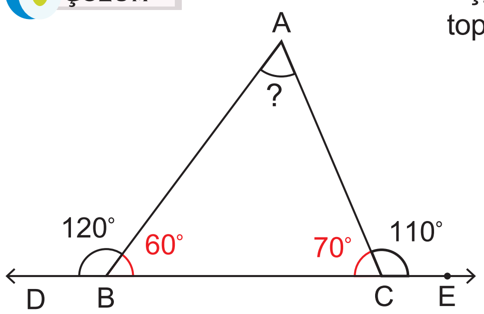
$$115° + 130° + m(\widehat{BCF}) = 360° \Rightarrow 245° + m(\widehat{BCF}) = 360°$$
$$\Rightarrow m(\widehat{BCF}) = 360° - 245°$$
$$\Rightarrow m(\widehat{BCF}) = 115° \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK



$\overset{\frown}{ABC}$ nde $m(\widehat{ABD}) = 120°$, $m(\widehat{ACE}) = 110°$ olduğuna göre $m(\widehat{A})$ kaç derecedir?

ÇÖZÜM

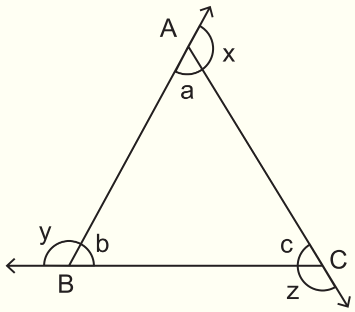


Üçgenin bir iç açısıyla bu köşeye ait dış açısının ölçüsünün toplamı $180°$ olduğundan

$$m(\widehat{DBA}) + m(\widehat{ABC}) = 180° \Rightarrow 120° + m(\widehat{ABC}) = 180°$$
$$\Rightarrow m(\widehat{ABC}) = 180° - 120°$$
$$\Rightarrow m(\widehat{ABC}) = 60° \text{ olur.}$$
$$m(\widehat{ACE}) + m(\widehat{ACB}) = 180° \Rightarrow 110° + m(\widehat{ACB}) = 180°$$
$$\Rightarrow m(\widehat{ACB}) = 180° - 110°$$
$$\Rightarrow m(\widehat{ACB}) = 70° \text{ olur.}$$

Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı $180°$ olduğundan $m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ACB}) = 180°$ olur. Bu durumda

$$m(\widehat{BAC}) + 60° + 70° = 180° \Rightarrow m(\widehat{BAC}) + 130° = 180°$$
$$\Rightarrow m(\widehat{BAC}) = 180° - 130° = 50° \text{ bulunur.}$$



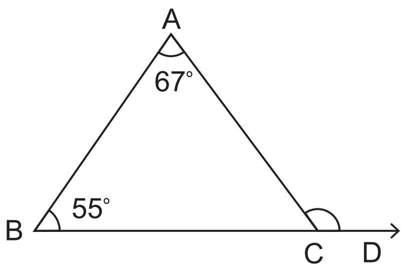
Bir üçgenin herhangi bir dış açısının ölçüsü kendisine komşu olmayan iki iç açısının ölçülerinin toplamına eşittir.

Yandaki ABC üçgeninde $a + b + c = 180°$ ve $a + x = 180°$ olduğundan $a + b + c = a + x$ olur.

$a + b + c = a + x \Rightarrow b + c = x$ bulunur.

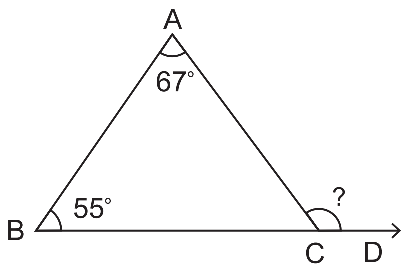
Benzer şekilde $y = a + c$ ve $z = a + b$ olduğu elde edilir.

ÖRNEK



$\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{A}) = 67°$ ve $m(\widehat{B}) = 55°$ olduğuna göre $m(\widehat{ACD})$ kaç derecedir?

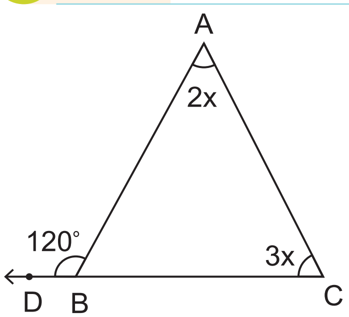
ÇÖZÜM



Üçgenin bir dış açısının ölçüsü, kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşit olduğundan

$$m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) \Rightarrow m(\widehat{ACD}) = 67° + 55°$$
$$\Rightarrow m(\widehat{ACD}) = 122° \text{ bulunur.}$$

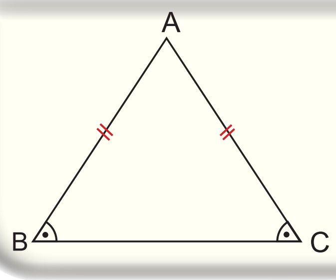
ÖRNEK



$\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{A}) = 2x$, $m(\widehat{C}) = 3x$ ve $m(\widehat{DBA}) = 120°$ olduğuna göre x kaç derecedir?

ÇÖZÜM

$$m(\widehat{A}) + m(\widehat{C}) = m(\widehat{DBA}) \Rightarrow 2x + 3x = 120°$$
$$\Rightarrow 5x = 120°$$
$$\Rightarrow x = 24° \text{ bulunur.}$$

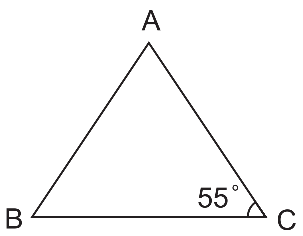


İki kenar uzunluğu eşit olan üçgene **ikizkenar üçgen** denir.

Yandaki ABC İkizkenar üçgeninde

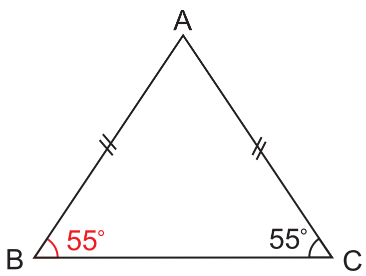
$|AB| = |AC| \Leftrightarrow m(\widehat{B}) = m(\widehat{C})$ olur.

ÖRNEK



ABC üçgeninde $|AB| = |AC|$ ve $m(\widehat{C}) = 55°$ olduğuna göre $m(\widehat{A})$ kaç derecedir?

ÇÖZÜM

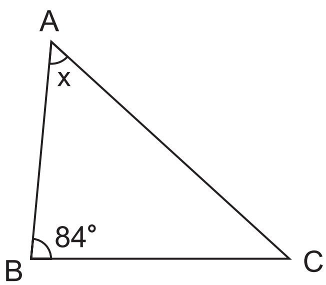


$|AB| = |AC|$ olduğundan ABC üçgeni ikizkenar üçgendir ve $m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 55°$ olur. Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı $180°$ olduğundan $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180°$ olur.

Bu durumda

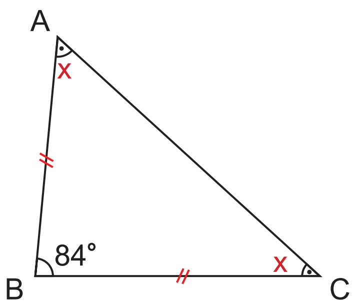
$$m(\widehat{A}) + 55° + 55° = 180° \Rightarrow m(\widehat{A}) + 110° = 180°$$
$$\Rightarrow m(\widehat{A}) = 180° - 110°$$
$$\Rightarrow m(\widehat{A}) = 70° \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK



ABC üçgeninde $|AB| = |BC|$ ve $m(\widehat{B}) = 84°$ olduğuna göre $m(\widehat{A}) = x$ kaç derecedir?

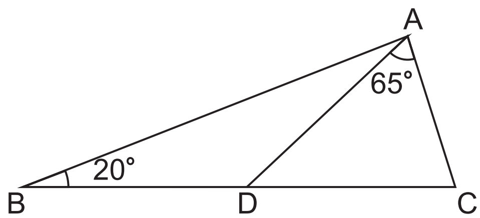
ÇÖZÜM



ABC üçgeni ikizkenar üçgendir ve $m(\widehat{A}) = m(\widehat{C}) = x$ olur. Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı $180°$ olduğundan $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180°$ olur.
Bu durumda

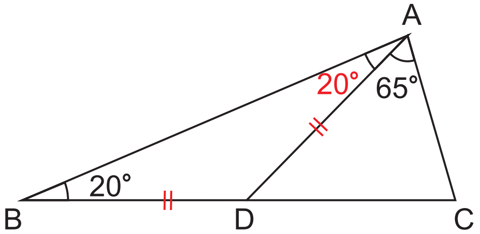
$$x + 84° + x = 180° \Rightarrow 2x = 180° - 84°$$
$$\Rightarrow 2x = 96°$$
$$\Rightarrow x = 48° \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK



ABC bir üçgen $|BD| = |AD|$, $m(\widehat{B}) = 20°$ ve $m(\widehat{DAC}) = 65°$ olduğuna göre $m(\widehat{C})$ kaç derecedir?

ÇÖZÜM



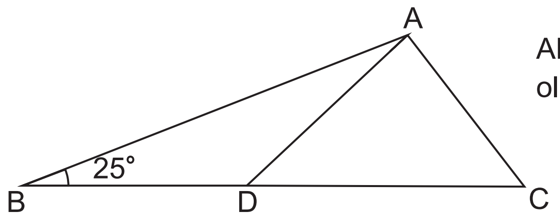
$|BD| = |AD|$ ise $m(\widehat{B}) = m(\widehat{BAD}) = 20°$ olur.

$m(\widehat{A}) = 20° + 65° = 85°$ elde edilir. ABC üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamı $180°$ olduğundan

$85° + 20° + m(\widehat{C}) = 180° \Rightarrow 105° + m(\widehat{C}) = 180°$

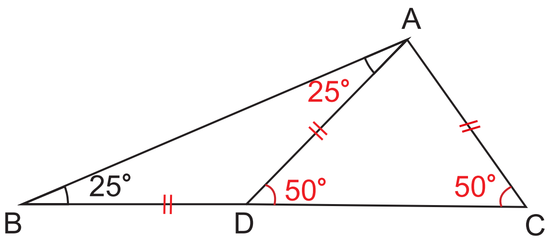
$\Rightarrow m(\widehat{C}) = 75°$ bulunur.

ÖRNEK



ABC bir üçgen $|BD| = |AD| = |AC|$, $m(\widehat{B}) = 25°$ olduğuna göre $m(\widehat{DAC})$ kaç derecedir?

ÇÖZÜM



$|BD| = |AD|$ ise $m(\widehat{B}) = m(\widehat{BAD}) = 25°$ olur.

$m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{ABD}) + m(\widehat{BAD})$
$= 25° + 25°$
$= 50°$ olur.

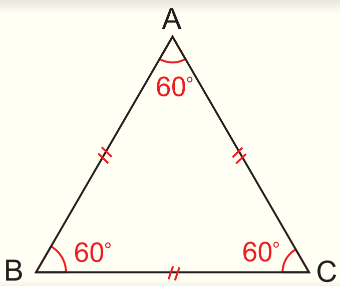
ADC ikizkenar üçgeninden

$m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{ACD}) = 50°$ olur.

ADC ikizkenar üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamı $180°$ olduğundan

$m(\widehat{DAC}) + m(\widehat{ADC}) + m(\widehat{ACD}) = 180° \Rightarrow m(\widehat{DAC}) + 50° + 50° = 180°$

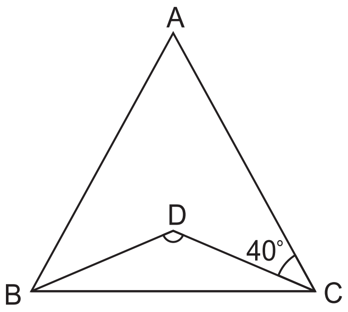
$\Rightarrow m(\widehat{DAC}) = 80°$ bulunur.



Kenar uzunlukları eşit olan üçgene **eşkenar üçgen** denir. Eşkenar üçgenin bir iç açısının ölçüsü $60°$, bir dış açısının ölçüsü $120°$ dir. ABC eşkenar üçgeninde

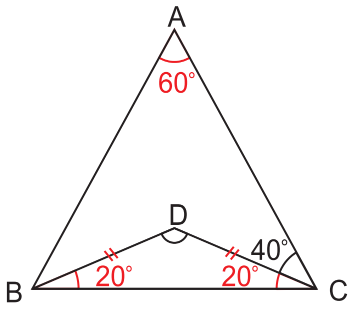
$|AB| = |AC| = |BC|$ ve $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = m(\widehat{C})$ olur.

ÖRNEK



ABC eşkenar üçgendir. BDC üçgeninde $|BD| = |DC|$ ve $m(\widehat{ACD}) = 40°$ olduğuna göre $m(\widehat{BDC})$ kaç derecedir?

ÇÖZÜM



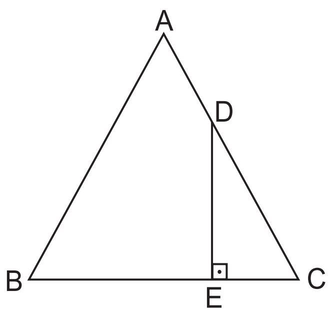
ABC eşkenar üçgen ise $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 60°$ olur. $m(\widehat{ACD}) + m(\widehat{DCB}) = m(\widehat{C})$ olduğundan

$$40° + m(\widehat{DCB}) = 60° \Rightarrow m(\widehat{DCB}) = 60° - 40°$$
$$\Rightarrow m(\widehat{DCB}) = 20° \text{ olur.}$$

BCD ikizkenar üçgen olduğundan $m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{DCB}) = 20°$ olur. BCD üçgeninde $m(\widehat{BDC}) + m(\widehat{DCB}) + m(\widehat{DBC}) = 180°$ eşitliğinde

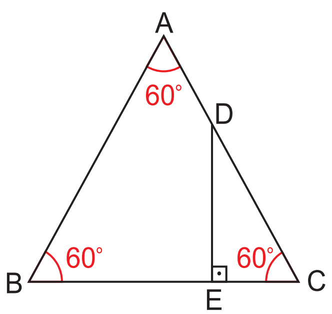
$$m(\widehat{BDC}) + 20° + 20° = 180° \Rightarrow m(\widehat{BDC}) + 40° = 180°$$
$$\Rightarrow m(\widehat{BDC}) = 180° - 40°$$
$$\Rightarrow m(\widehat{BDC}) = 140° \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK



ABC eşkenar üçgen ve $[DE] \perp [EC]$ olduğuna göre $m(\widehat{EDC})$ kaç derecedir?

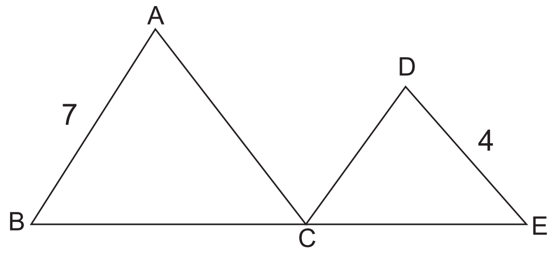
ÇÖZÜM



ABC eşkenar üçgen olduğundan $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 60°$ dir. $\widehat{DEC}$ nde $m(\widehat{EDC}) + m(\widehat{DEC}) + m(\widehat{DCE}) = 180°$ olur. Bu durumda

$$m(\widehat{EDC}) + 90° + 60° = 180° \Rightarrow m(\widehat{EDC}) + 150° = 180°$$
$$\Rightarrow m(\widehat{EDC}) = 180° - 150°$$
$$\Rightarrow m(\widehat{EDC}) = 30° \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK



ABC ve DCE birer eşkenar üçgen; B, C ve E noktaları doğrusal; $|AB| = 7$ cm ve $|DE| = 4$ cm olduğuna göre $|BE|$ kaç cm dir?

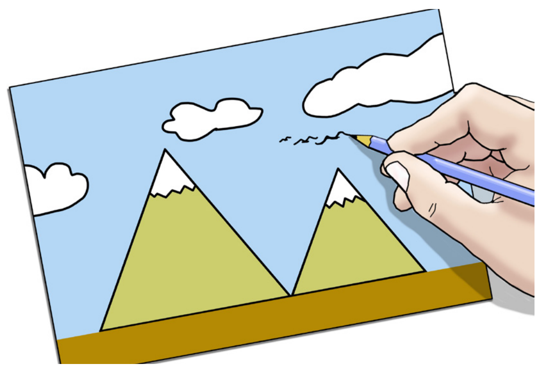
ÇÖZÜM

ABC eşkenar üçgen olduğundan $|AB| = |AC| = |BC| = 7$ cm

DCE eşkenar üçgen olduğundan $|DC| = |DE| = |CE| = 4$ cm olur.

Ayrıca $|BE| = |BC| + |CE|$ olduğundan $|BE| = |BC| + |CE| = 7 + 4 = 11$ cm bulunur.

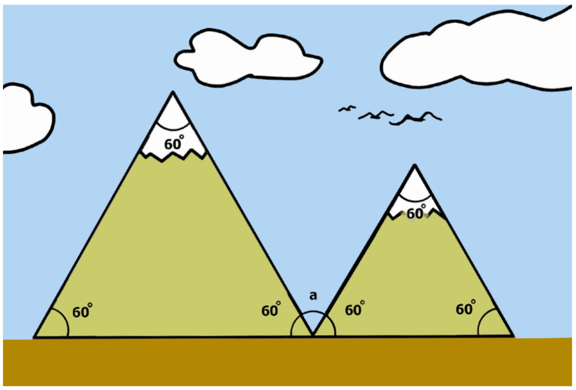
ÖRNEK



Görsel 2.5

Bir öğrenci çizdiği resme, doğru boyunca uzanan eşkenar üçgen şeklinde iki tane dağ çiziyor. Buna göre bu dağların arasında kalan açının ölçüsü kaç derecedir?

ÇÖZÜM



Görsel 2.6

Dağlar eşkenar üçgen şeklinde olduğundan iç açılarının ölçüleri 60° dir. Dağlar arasında kalan açının ölçüsüne a denilirse

$60° + a + 60° = 180° \Rightarrow a + 120° = 180°$

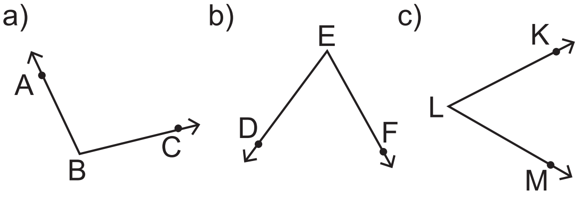
$\Rightarrow a = 180° - 120°$

$\Rightarrow a = 60°$ bulunur.

ALIŞTIRMALAR-1

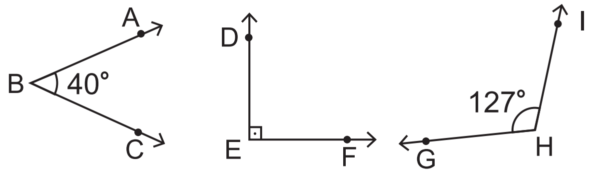
1. Aşağıda verilen açıları sembolle yazınız.

a) b) c)

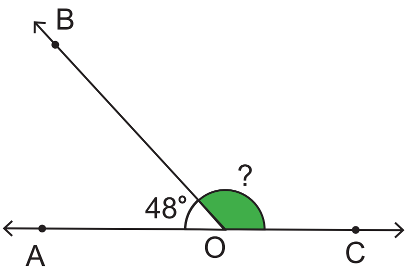


2. Aşağıda verilen açıların çeşitlerini bulunuz.

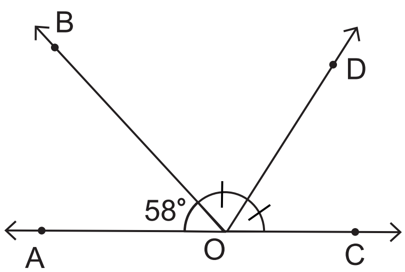
a) b) c)



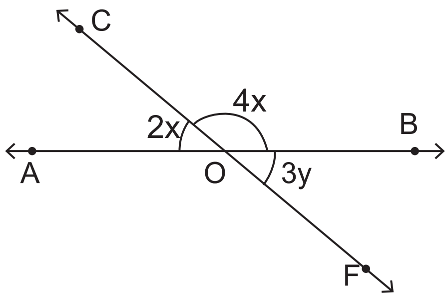
3. Aşağıda verilen şekilde A, O ve C noktaları doğrusaldır. $m(\widehat{AOB}) = 48°$ olduğuna göre $\widehat{BOC}$ nın ölçüsü kaç derecedir?



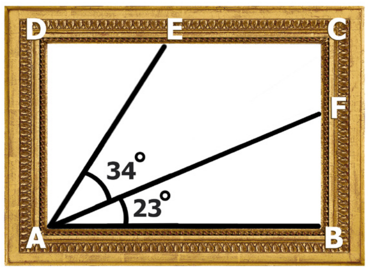
4. Aşağıda verilen şekilde A, O ve C noktaları doğrusaldır. $m(\widehat{AOB}) = 58°$ ve $m(\widehat{BOD}) = m(\widehat{DOC})$ olduğuna göre $\widehat{BOD}$ nın ölçüsü kaç derecedir?



5. Aşağıda verilen şekilde A, O ve B; C, O ve F noktaları doğrusaldır. $m(\widehat{AOC}) = 2x$, $m(\widehat{COB}) = 4x$ ve $m(\widehat{BOF}) = 3y$ olduğuna göre y kaç derecedir?



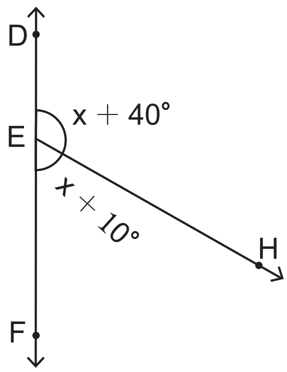
6.



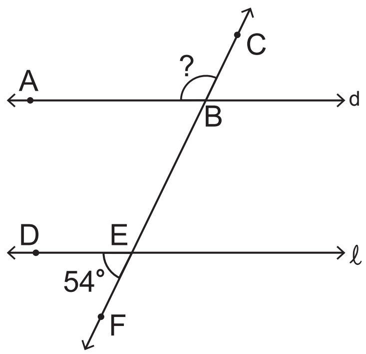
Görsel 2.7

Dikdörtgen şeklindeki bir resim çerçevesi A köşesinden karşı kenarlara çizilen iki doğru parçasıyla üç parçaya ayrılıyor. Bu durumda A açısı ölçüleri farklı üç açıya bölünüyor. Bu açılardan $m(\widehat{FAB}) = 23°$ ve $m(\widehat{EAF}) = 34°$ olduğuna göre $\widehat{DAE}$ nın ölçüsü kaç derecedir?

7. Şekilde D, E ve F doğrusal olduğuna göre x kaç derecedir?

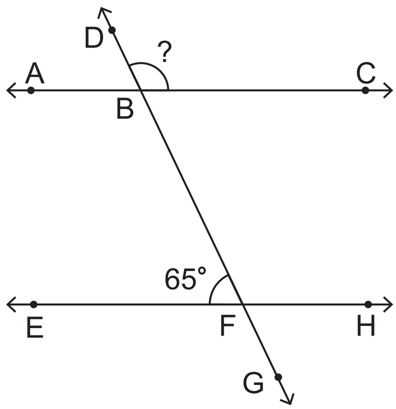


8.



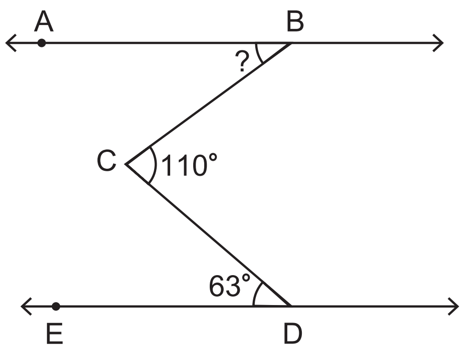
Yukarıda verilen şekilde $d \parallel \ell$ ve $m(\widehat{DEF}) = 54°$ olduğuna göre $m(\widehat{ABC})$ kaç derecedir?

9.



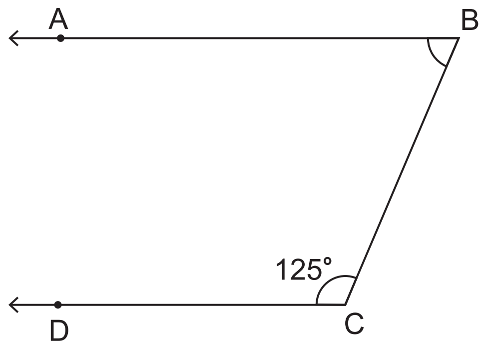
Yukarıda verilen şekilde $AC \parallel EH$ ve $m(\widehat{EFB}) = 65°$ olduğuna göre $\widehat{DBC}$ nın ölçüsü kaç derecedir?

10.



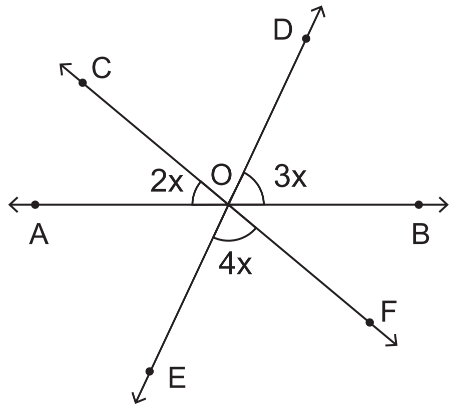
Yukarıda verilen şekilde $AB \parallel ED$, $m(\widehat{BCD}) = 110°$ ve $m(\widehat{CDE}) = 63°$ olduğuna göre $m(\widehat{ABC})$ kaç derecedir?

11.



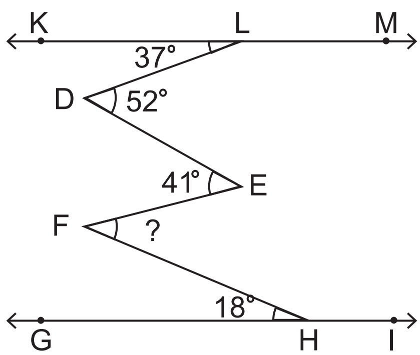
Yukarıda verilen şekilde $[BA \parallel [CD$ ve $m(\widehat{DCB}) = 125°$ olduğuna göre $m(\widehat{ABC})$ kaç derecedir?

12.



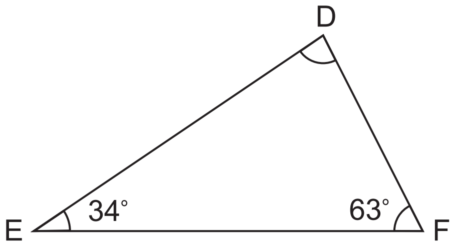
Yukarıda verilen şekilde AB, ED ve CF doğruları O noktasında kesişiyor. $m(\widehat{AOC}) = 2x$, $m(\widehat{DOB}) = 3x$ ve $m(\widehat{EOF}) = 4x$ olduğuna göre x kaç derecedir?

13.



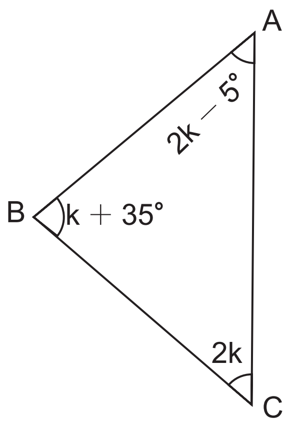
Yukarıda verilen şekilde $KM \parallel GI$, $m(\widehat{KLD}) = 37°$, $m(\widehat{LDE}) = 52°$, $m(\widehat{DEF}) = 41°$ ve $m(\widehat{FHG}) = 18°$ olduğuna göre $m(\widehat{EFH})$ kaç derecedir?

1.



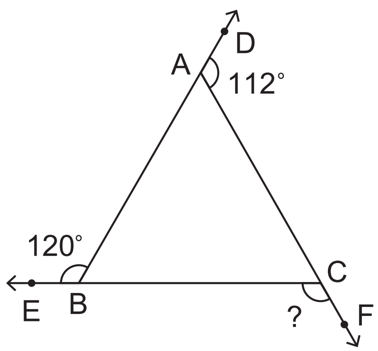
$\widehat{DEF}$ nde $m(\widehat{E}) = 34°$ ve $m(\widehat{F}) = 63°$ olduğuna göre $m(\widehat{D})$ kaç derecedir?

2.



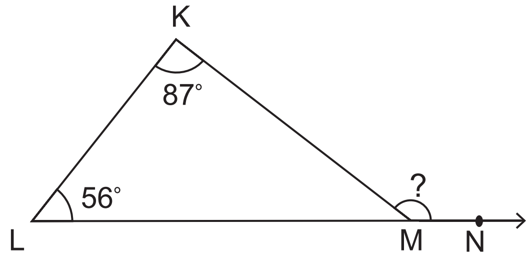
$\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{A}) = 2k - 5°$, $m(\widehat{B}) = k + 35°$ ve $m(\widehat{C}) = 2k$ olduğuna göre k kaç derecedir?

3.



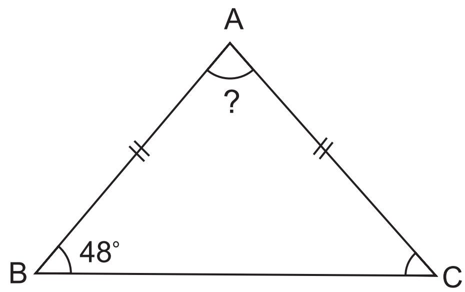
Yukarıda verilen şekilde $m(\widehat{EBA}) = 120°$ ve $m(\widehat{CAD}) = 112°$ olduğuna göre $m(\widehat{BCF})$ kaç derecedir?

4.



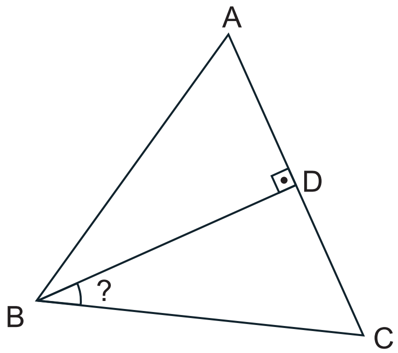
Yukarıda verilen şekilde $m(\widehat{K}) = 87°$ ve $m(\widehat{L}) = 56°$ olduğuna göre $m(\widehat{KMN})$ kaç derecedir?

5.



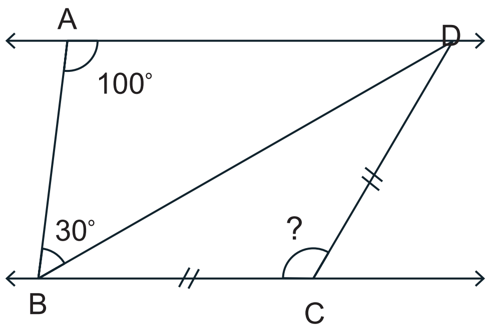
$\widehat{ABC}$ nde $|AB| = |AC|$ ve $m(\widehat{B}) = 48°$ olduğuna göre $m(\widehat{A})$ kaç derecedir?

6.



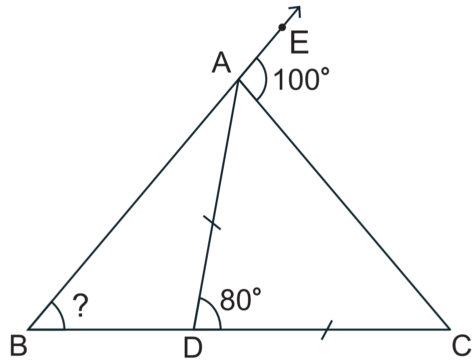
$\widehat{ABC}$ eşkenar üçgendir. B köşesinden $[AC]$ kenarına indirilen dikme $[BD]$ olduğuna göre $m(\widehat{DBC})$ kaç derecedir?

7.



$AD \parallel BC$, $m(\widehat{ABD}) = 30°$, $m(\widehat{BAD}) = 100°$ ve $|BC| = |DC|$ olduğuna göre $m(\widehat{BCD})$ kaç derecedir?

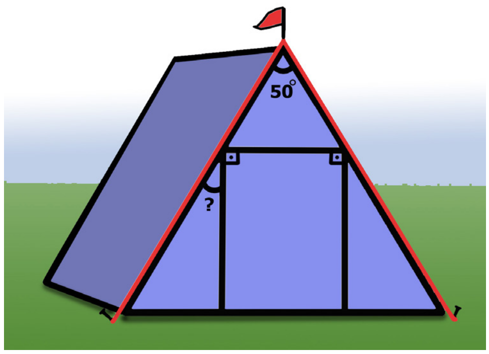
8.



Şekilde ABC bir üçgen ve B, D ile C noktaları doğrusaldır.

$|AD| = |DC|$, $m(\widehat{EAC}) = 100°$ ve $m(\widehat{ADC}) = 80°$ olduğuna göre $m(\widehat{ABD})$ kaç derecedir?

9.

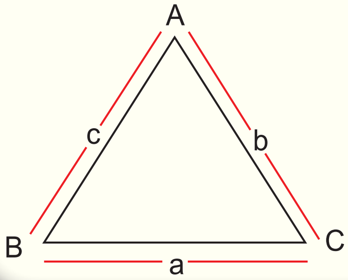


Görsel 2.8

Bir kamp çadırında bayrağın bulunduğu tepe noktasının iki yanından toprağa uzatılan kırmızı iplerin uzunlukları eşittir. Çadırın tepe açısının ölçüsü $50°$ dir.

Çadırın ön tarafında dikdörtgen biçiminde bir kapı bulunmaktadır. Buna göre kapının düşey kenarı ile çadır ipinin arasında kalan açının ölçüsü kaç derecedir?

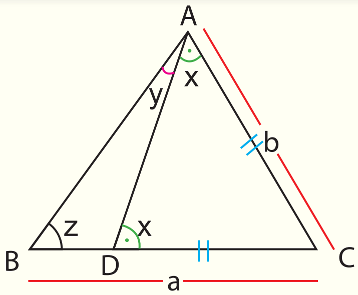
2.1.2. Üçgenin Kenar Uzunlukları ile Bu Kenarların Karşılarındaki Açıların Ölçüleri Arasındaki İlişki



Bir üçgende ölçüsü büyük olan açının karşısında uzun kenar, ölçüsü küçük olan açının karşısında kısa kenar bulunur. Bir başka ifadeyle uzun kenarın karşısında ölçüsü büyük olan açı, kısa kenarın karşısında ölçüsü küçük olan açı bulunur.

$\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{A}) > m(\widehat{B}) > m(\widehat{C})$ ise $a > b > c$

$a > b > c$ ise $m(\widehat{A}) > m(\widehat{B}) > m(\widehat{C})$ olur.



Bir ABC üçgeninde $|BC| = a$, $|AC| = b$, $D \in [BC]$,

$a > b$ ve $|AC| = |DC|$ olacak şekilde $[AD]$ çizilsin.

$m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{ADC}) = x$, $m(\widehat{BAD}) = y$ ve $m(\widehat{ABC}) = z$

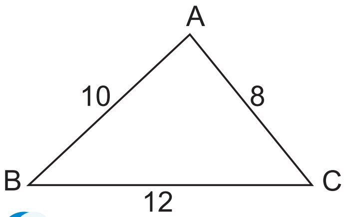
olmak üzere $m(\widehat{A}) = x + y$ ve $m(\widehat{B}) = z$ olur.

$x = y + z$ olduğundan $x > y$ ve $x > z$ olur.

Bu durumda $x + y > z$ elde edilir.

Buradan $m(\widehat{A}) > m(\widehat{B})$ olduğu gösterilmiş olur.

ÖRNEK

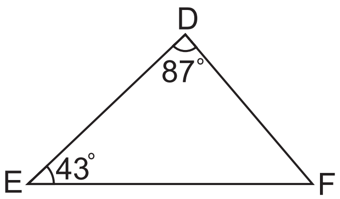


Kenar uzunlukları $|AB| = 10$ cm, $|AC| = 8$ cm ve $|BC| = 12$ cm olan $\widehat{ABC}$ nin iç açılarının ölçülerini büyükten küçüğe doğru sıralayınız.

ÇÖZÜM

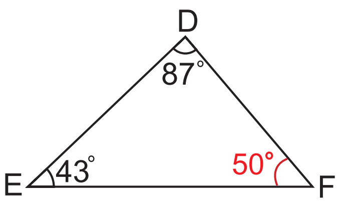
$12 \text{ cm} > 10 \text{ cm} > 8 \text{ cm}$ olduğundan $|BC| > |AB| > |AC|$ dir. Büyük kenar karşısında büyük açı, küçük kenar karşısında küçük açı olacağından $m(\widehat{A}) > m(\widehat{C}) > m(\widehat{B})$ olarak sıralanır.

ÖRNEK



DEF üçgeninde $m(\widehat{D}) = 87°$ ve $m(\widehat{E}) = 43°$ olduğuna göre üçgenin kenar uzunlukları olan $|DE|$, $|DF|$ ve $|EF|$ nu küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

ÇÖZÜM

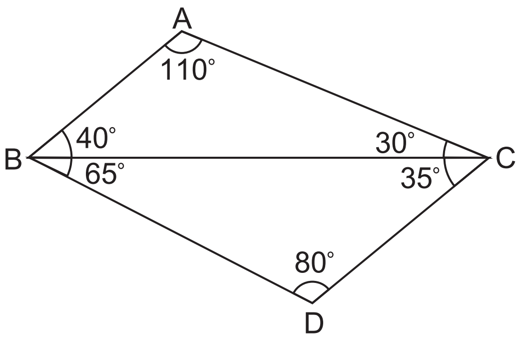


$m(\widehat{D}) + m(\widehat{E}) + m(\widehat{F}) = 180° \Rightarrow 87° + 43° + m(\widehat{F}) = 180°$

$\Rightarrow m(\widehat{F}) = 50°$ olur.

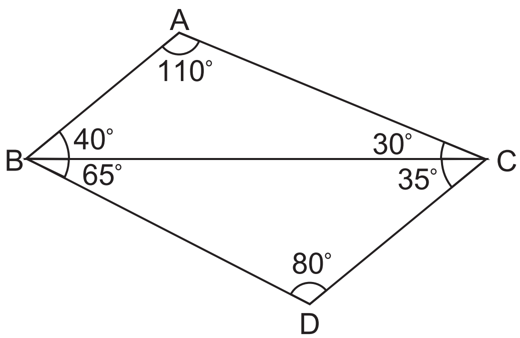
Açılar arasındaki sıralama $m(\widehat{E}) < m(\widehat{F}) < m(\widehat{D})$ olarak elde edilir. Bu durumda DEF üçgeninin kenarları arasındaki sıralama $|DF| < |DE| < |EF|$ bulunur.

ÖRNEK



Yanda verilen şekilde ABC üçgeninde
$m(\widehat{BAC}) = 110°$, $m(\widehat{ABC}) = 40°$, $m(\widehat{ACB}) = 30°$
ve DBC üçgeninde
$m(\widehat{BDC}) = 80°$, $m(\widehat{DBC}) = 65°$, $m(\widehat{BCD}) = 35°$
olduğuna göre <u>en uzun</u> kenarı bulunuz.

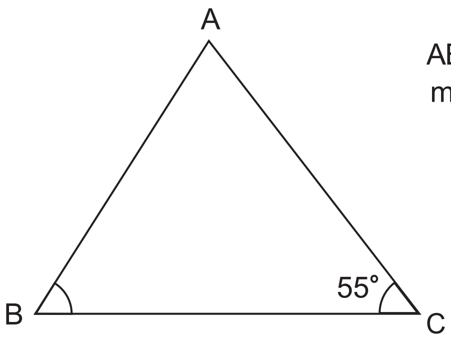
ÇÖZÜM



ABC üçgeninde
$m(\widehat{BAC}) > m(\widehat{ABC}) > m(\widehat{ACB})$ olduğundan
$|BC| > |AC| > |AB|$ olur.

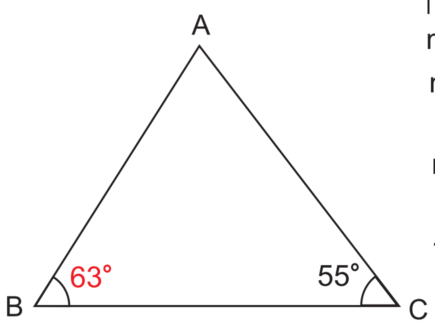
DBC üçgeninde;
$m(\widehat{BDC}) > m(\widehat{DBC}) > m(\widehat{BCD})$ olduğundan
$|BC| > |CD| > |BD|$ olur.
Her iki eşitsizlikten en uzun kenarın $[BC]$ olduğu bulunur.

ÖRNEK



ABC üçgeninde $m(\widehat{C}) = 55°$ ve $|BC| < |AC|$ olduğuna göre $m(\widehat{B})$ nün alacağı <u>en küçük</u> tam sayı değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

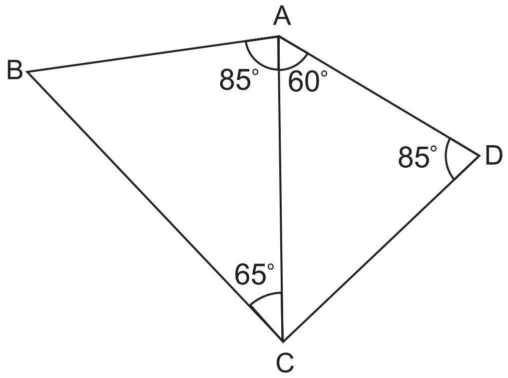


$|BC| < |AC|$ olduğundan $m(\widehat{A}) < m(\widehat{B})$ olur.
$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180°$ eşitliğinde
$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + 55° = 180° \Rightarrow m(\widehat{A}) = 180° - 55° - m(\widehat{B})$
$\Rightarrow m(\widehat{A}) = 125° - m(\widehat{B})$ olur.
$m(\widehat{A})$ nün değeri $m(\widehat{A}) < m(\widehat{B})$ eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$125° - m(\widehat{B}) < m(\widehat{B}) \Rightarrow 125° < m(\widehat{B}) + m(\widehat{B})$
$\Rightarrow 125° < 2m(\widehat{B})$
$\Rightarrow 62,5° < m(\widehat{B})$ bulunur.

Bu durumda $m(\widehat{B})$ nün en küçük tam sayı değeri 63° bulunur.

ÖRNEK



Yanda verilen şekilde ABC üçgeninde

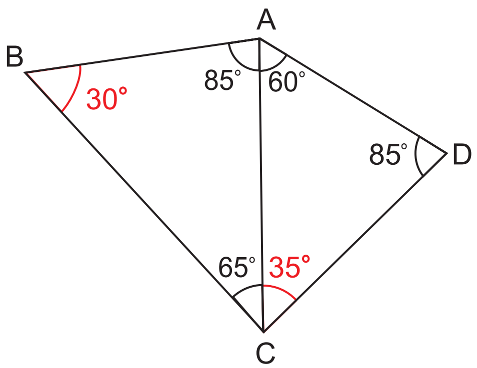
$m(\widehat{BAC}) = 85°$, $m(\widehat{BCA}) = 65°$ ve

ACD üçgeninde

$m(\widehat{CAD}) = 60°$, $m(\widehat{CDA}) = 85°$

olduğuna göre şekildeki <u>en kısa</u> kenarı bulunuz.

ÇÖZÜM



Üçgende kenar uzunluklarının karşılaştırılması için bütün iç açı ölçülerinin bilinmesi gerekir.

ACD üçgeninde $m(\widehat{CAD}) + m(\widehat{CDA}) + m(\widehat{ACD}) = 180°$ olduğundan

$$60° + 85° + m(\widehat{ACD}) = 180° \Rightarrow 145 + m(\widehat{ACD}) = 180°$$
$$\Rightarrow m(\widehat{ACD}) = 180° - 145°$$
$$\Rightarrow m(\widehat{ACD}) = 35° \text{ olur.}$$

O hâlde ACD üçgeninde $m(\widehat{ACD}) < m(\widehat{CAD}) < m(\widehat{CDA})$ olduğundan kenar uzunlukları arasında $|AD| < |CD| < |AC| ......(1)$ sıralaması vardır.

ABC üçgeninde $m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{BCA}) + m(\widehat{ABC}) = 180°$ olduğundan

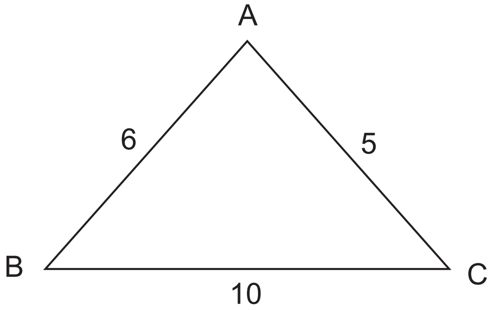
$$85° + 65° + m(\widehat{ABC}) = 180° \Rightarrow 150° + m(\widehat{ABC}) = 180°$$
$$\Rightarrow m(\widehat{ABC}) = 180° - 150°$$
$$\Rightarrow m(\widehat{ABC}) = 30° \text{ olur.}$$

O hâlde ABC üçgeninde $m(\widehat{ABC}) < m(\widehat{BCA}) < m(\widehat{BAC})$ olduğundan kenar uzunlukları arasında $|AC| < |AB| < |BC| ......(2)$ sıralaması vardır.

(1) ve (2) den $|AD| < |CD| < |AC| < |AB| < |BC|$ olduğu görülür. Bu durumda en kısa kenarın $[AD]$ olduğu bulunur.

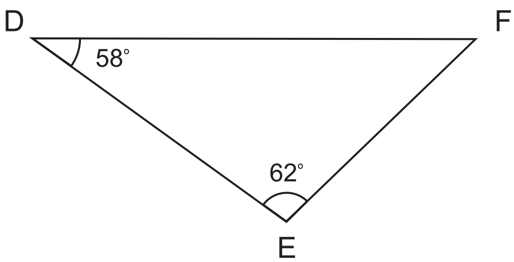
ALIŞTIRMALAR

1.



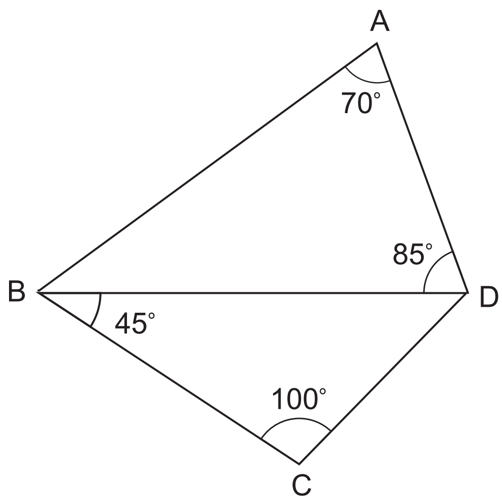
ABC üçgeninde
$|AB| = 6$ cm, $|AC| = 5$ cm ve
$|BC| = 10$ cm olduğuna göre
$\widehat{ABC}$ nin iç açılarının ölçülerini
küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

2.



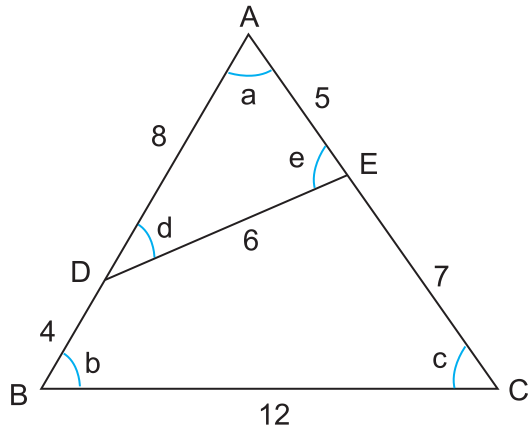
$\widehat{DEF}$ nde $m(\widehat{D}) = 58°$, $m(\widehat{E}) = 62°$
olduğuna göre $\widehat{DEF}$ nin kenar
uzunluklarını büyükten küçüğe doğru
sıralayınız.

3.



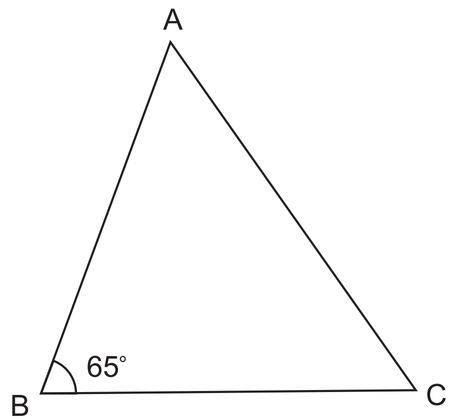
Şekilde $m(\widehat{BAD}) = 70°$, $m(\widehat{ADB}) = 85°$
$m(\widehat{DBC}) = 45°$, $m(\widehat{BCD}) = 100°$
olduğuna göre <u>en uzun</u> kenarı bulunuz.

4.



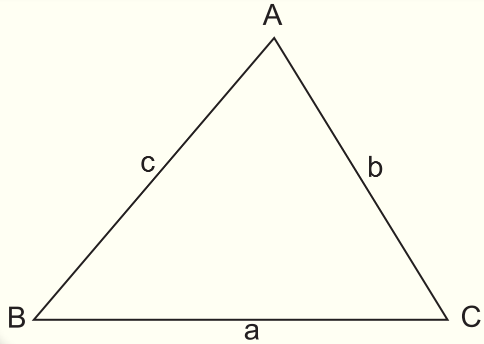
ABC üçgeninde A, D ve B; A, E ve C
noktaları doğrusal olmak üzere
$|AD| = 8$ cm, $|AE| = 5$ cm,
$|DB| = 4$ cm, $|EC| = 7$ cm,
$|DE| = 6$ cm ve $|BC| = 12$ cm
olduğuna göre şekilde gösterilen
açılardan hangisinin ölçüsü en büyüktür?

5.



ABC üçgeninde $m(\widehat{ABC}) = 65°$ ve
$|BC| < |AC|$ olduğuna göre $m(\widehat{C})$ nün
alacağı <u>en küçük</u> tam sayı değerini bulunuz.

2.1.3. Uzunlukları Verilen Üç Doğru Parçasının Hangi Durumlarda Üçgen Oluşturduğunun Değerlendirilmesi



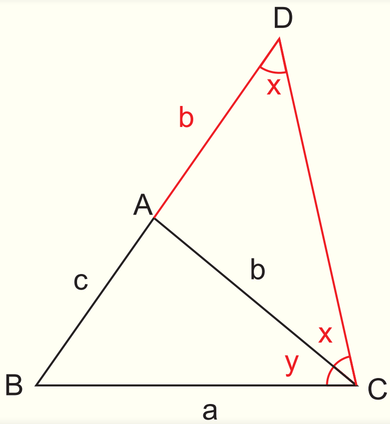
Bir üçgende herhangi bir kenar uzunluğu, diğer iki kenarın uzunluklarının toplamından küçüktür.

$\widehat{ABC}$ nde $|BC| = a$, $|AC| = b$ ve $|AB| = c$ olmak üzere

$a < b + c$

$b < a + c$

$c < a + b$ olur.



B, A, D noktaları doğrusal ve $|AD| = b$ olacak şekilde DAC ikizkenar üçgeni oluşturulsun.

$m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{ACD}) = x$ ve $m(\widehat{ACB}) = y$ olsun.

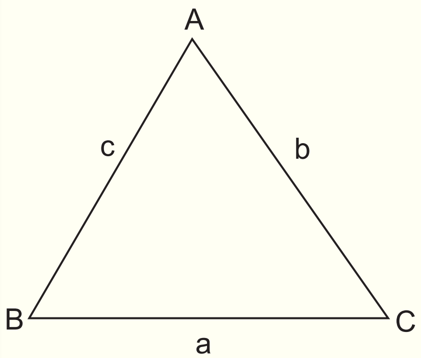
$|AB| = c$, $|AD| = b$, $|AC| = b$, $|BC| = a$ ve

$|BD| = b + c$ dir.

$x < x + y$ olduğundan $|BC| < |BD|$ olur.

Buradan $a < b + c$ olduğu görülür.

Bir üçgende herhangi bir kenar uzunluğu; diğer iki kenarın uzunluklarının toplamından küçük, farklarının mutlak değerinden büyüktür. Bu ifadeye **üçgen eşitsizliği** denir.



$\widehat{ABC}$ nde $|BC| = a$, $|AC| = b$ ve $|AB| = c$ olmak üzere

$|b - c| < a < b + c$

$|a - c| < b < a + c$

$|a - b| < c < a + b$ olur.

$\widehat{ABC}$ nde

$a < b + c$

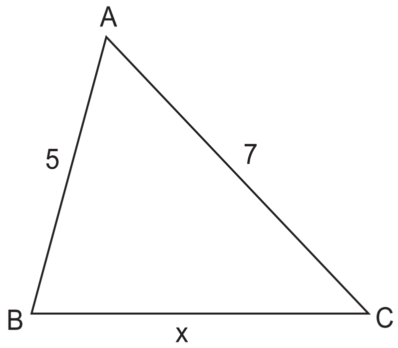
$b < a + c$

$c < a + b$ olur.

$$\left.\begin{array}{l} b < a + c \text{ ise } b - c < a \\ c < a + b \text{ ise } c - b < a \end{array}\right\} \text{ise } |b - c| < a$$

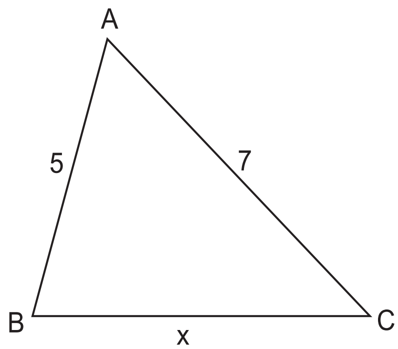
$$\left.\begin{array}{l} a < b + c \\ |b - c| < a \end{array}\right\} \text{ise } |b - c| < a < b + c \text{ olduğu görülür.}$$

ÖRNEK



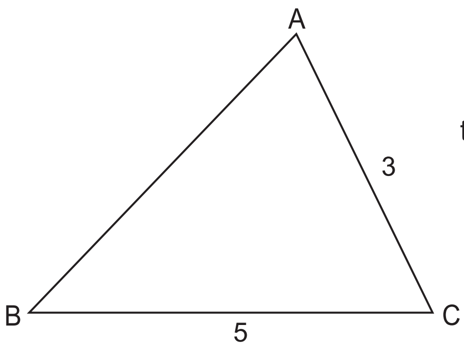
ABC üçgeninde
$|AB| = 5$ cm, $|AC| = 7$ cm ve $|BC| = x$ cm olduğuna göre x in alabileceği tam sayı değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM



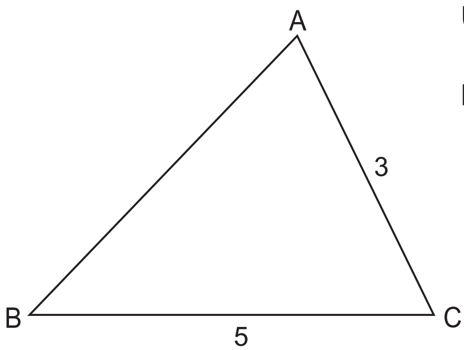
Üçgen eşitsizliğinden $|7 - 5| < x < 7 + 5$ ve buradan $2 < x < 12$ olur.
Bu durumda x in alabileceği tam sayı değerleri 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ve 11 bulunur.

ÖRNEK



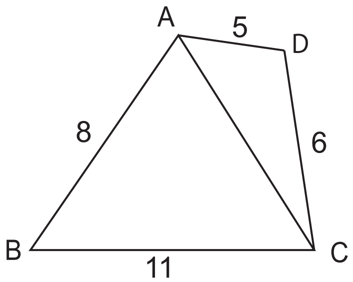
$\widehat{ABC}$ nde $|AC| = 3$ cm ve $|BC| = 5$ cm olduğuna göre $|AB|$ nun cm cinsinden alabileceği tam sayı değerlerinin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM



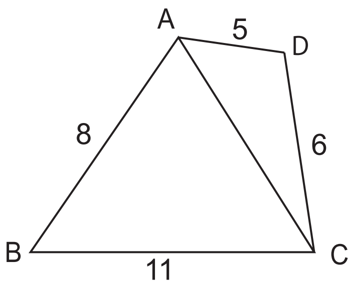
Üçgen eşitsizliğinden $|5 - 3| < |AB| < 5 + 3$ ve buradan $2 < |AB| < 8$ olur.
Bu durumda $|AB|$ nun alabileceği değerler toplamı $3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25$ bulunur.

ÖRNEK



Şekilde ABC ve ACD bir üçgen $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 11$ cm, $|AD| = 5$ cm ve $|DC| = 6$ cm olduğuna göre $|AC|$ nun cm cinsinden alabileceği tam sayı değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM



$\widehat{ABC}$ nde $11 - 8 < |AC| < 11 + 8$

$3 < |AC| < 19$

$\widehat{ACD}$ nde $6 - 5 < |AC| < 6 + 5$

$1 < |AC| < 11$

Her iki eşitsizliği sağlayan $|AC|$ değerleri ortak çözüm ile bulunur.

$3 < |AC| < 19$

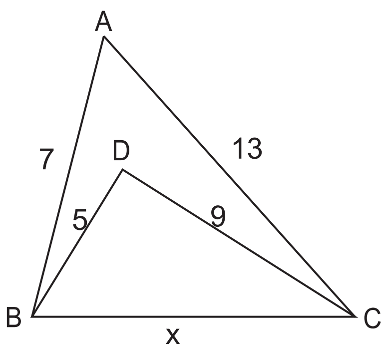
$1 < |AC| < 11$

İki eşitsizlikten alt sınırda büyük olan, üst sınırda küçük olan değer alınarak $|AC|$ nun alabileceği değer aralığı bulunur.

İki eşitsizliğin alt sınırında büyük olan değer 3, üst sınırında küçük olan değer 11 olduğundan $|AC|$ nun alabileceği değer aralığı $3 < |AC| < 11$ olur.

Bu durumda [AC] kenar uzunluğunun alacağı tam sayı değerleri 4, 5, 6, 7, 8, 9 ve 10 bulunur.

ÖRNEK



ABC üçgeninde $|AB| = 7$ cm, $|AC| = 13$ cm ve BDC üçgeninde $|BD| = 5$ cm, $|DC| = 9$ cm, $|BC| = x$ cm olduğuna göre x in alabileceği <u>en küçük</u> ve <u>en büyük</u> tam sayı değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\widehat{ABC}$ nde $13 - 7 < x < 13 + 7 \Rightarrow 6 < x < 20$

$\widehat{BCD}$ nde $9 - 5 < x < 9 + 5 \Rightarrow 4 < x < 14$ olur. Her iki eşitsizliğin ortak çözümü yapılırsa

$\left.\begin{array}{l} 6 < x < 20 \\ 4 < x < 14 \end{array}\right\}$ ise $6 < x < 14$ olur.

Bu aralıkta x in alabileceği en küçük tam sayı değeri 7, en büyük tam sayı değeri 13 olarak bulunur.

ÖRNEK

Aşağıda uzunlukları verilen doğru parçaları ile bir üçgen oluşturulup oluşturulamayacağını bulunuz.

a) $|AB| = 3$ cm, $|CD| = 5$ cm ve $|EF| = 10$ cm

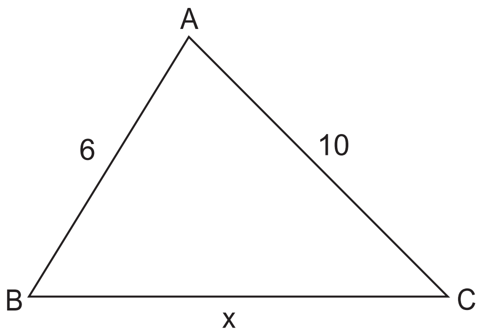
b) $|KL| = 6$ cm, $|MN| = 8$ cm ve $|PR| = 12$ cm

ÇÖZÜM

a) $|AB| = 3$ cm, $|CD| = 5$ cm ve $|EF| = 10$ cm ise herhangi bir doğru parçası seçilerek diğer doğru parçalarının toplamından küçük, farklarının mutlak değerinden büyük olup olmadığı incelenir. O hâlde $5 - 3 < 10 < 5 + 3 \Rightarrow 2 < 10 < 8$ olur. 10 değeri 8 değerinden büyük olduğu için eşitsizlik sağlanmaz. Bu durumda verilen doğru parçalarıyla bir üçgen oluşturulamaz.

b) $|KL| = 6$ cm, $|MN| = 8$ cm ve $|PR| = 12$ cm ise herhangi bir doğru parçası seçilerek diğer doğru parçalarının toplamından küçük, farklarının mutlak değerinden büyük olup olmadığı incelenir. O hâlde $12 - 8 < 6 < 12 + 8 \Rightarrow 4 < 6 < 20$ eşitliği doğru olduğu için verilen doğru parçaları ile bir üçgen oluşturulur.

ÖRNEK



$\widehat{ABC}$ nde $|AB| = 6$ cm, $|AC| = 10$ cm, $|BC| = x$ cm ve $m(\widehat{A}) > m(\widehat{B})$ olduğuna göre x in alabileceği tam sayı değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$10 - 6 < x < 10 + 6$

$4 < x < 16$ (üçgen eşitsizliği)

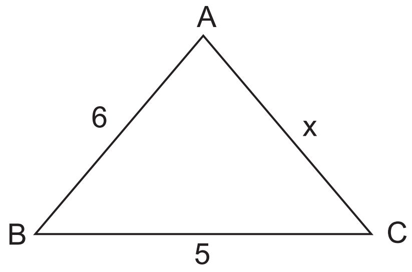
$m(\widehat{A}) > m(\widehat{B})$ olduğundan $x > 10$ olur. Bu durumda

$\left.\begin{array}{l} 4 < x < 16 \\ x > 10 \end{array}\right\}$ ise $10 < x < 16$ aralığı elde edilir.

Bu durumda x in bu aralıktaki alabileceği tam sayı değerleri 11, 12, 13, 14 ve 15 bulunur.

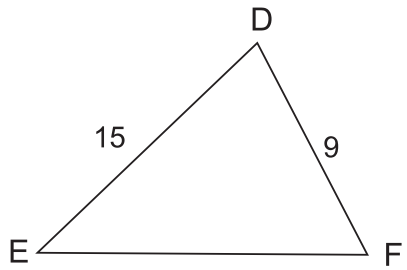
ALIŞTIRMALAR

1.



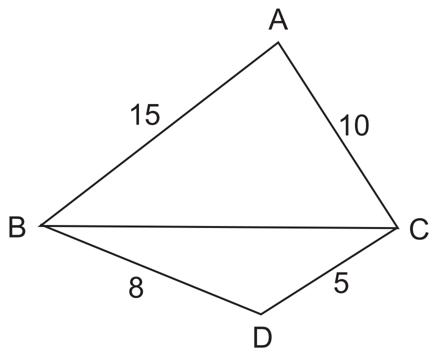
ABC üçgeninde $|AB| = 6$ cm, $|BC| = 5$ cm ve $|AC| = x$ cm olduğuna göre x in alabileceği kaç farklı tam sayı değeri olduğunu bulunuz.

2.



DEF üçgeninde
$|DE| = 15$ cm ve $|DF| = 9$ cm dir.
Buna göre [EF] kenar uzunluğunun cm cinsinden alabileceği <u>en büyük</u> tam sayı değerini bulunuz.

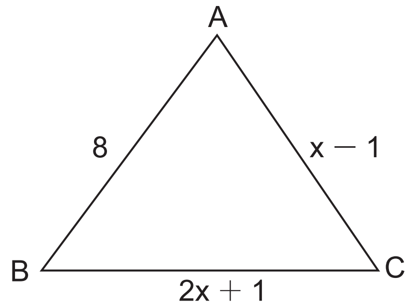
3.



ABC üçgeninde
$|AB| = 15$ cm, $|AC| = 10$ cm ve
BDC üçgeninde
$|BD| = 8$ cm, $|DC| = 5$ cm

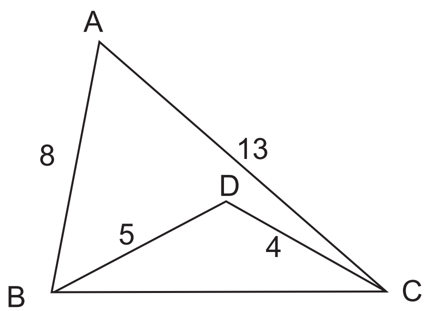
olduğuna göre [BC] kenar uzunluğunun cm cinsinden alabileceği <u>en küçük</u> ve <u>en büyük</u> tam sayı değerlerini bulunuz.

4.



ABC üçgeninde
$|AB| = 8$ birim
$|AC| = (x - 1)$ birim
$|BC| = (2x + 1)$ birim
olduğuna göre x in alabileceği değer aralığını bulunuz.

5.



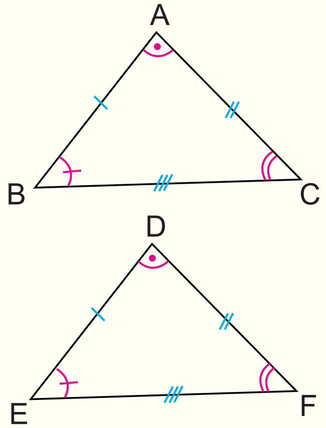
ABC üçgeninde
$|AB| = 8$ cm, $|AC| = 13$ cm ve
BDC üçgeninde
$|BD| = 5$ cm, $|DC| = 4$ cm

olduğuna göre [BC] kenar uzunluğunun cm cinsinden alabileceği tam sayı değerlerini bulunuz.

2.2. ÜÇGENLERDE EŞLİK VE BENZERLİK

2.2.1. İki Üçgenin Eş Olması İçin Gerekli Asgari Koşullar

İki üçgenin karşılıklı kenarlarının uzunlukları ve açılarının ölçüleri birbirine eşit ise bu üçgenlere **eş üçgenler** denir.



ABC ve DEF üçgenleri için

$$|AB| = |DE| \qquad m(\widehat{A}) = m(\widehat{D})$$
$$|AC| = |DF| \quad \text{ve} \quad m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$$
$$|BC| = |EF| \qquad m(\widehat{C}) = m(\widehat{F})$$

eşitlikleri sağlanıyorsa ABC üçgeni ile DEF üçgeni birbirine eştir denir ve $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ biçiminde gösterilir.

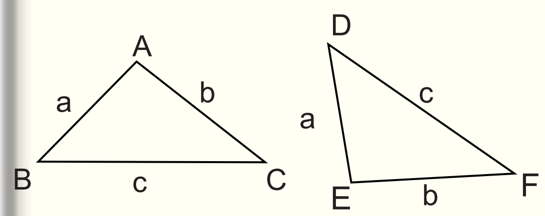
$$\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF} \text{ ise } \begin{matrix} |AB| = |DE| \\ |AC| = |DF| \\ |BC| = |EF| \end{matrix} \text{ ve } \begin{matrix} m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) \\ m(\widehat{B}) = m(\widehat{E}) \\ m(\widehat{C}) = m(\widehat{F}) \end{matrix} \text{ eşitlikleri sağlanır.}$$

$\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ gösteriminde karşılıklı açı ve kenarlar eşleştirildiğinden yazılış sırası önemlidir. Ayrıca eş üçgenlerin karşılıklı yardımcı elemanları da eşittir.

İki üçgenin karşılıklı tüm kenarlarının uzunlukları ve tüm açılarının ölçüleri eşitse bu iki üçgen eştir. Ancak iki üçgenin tüm kenarları ve tüm açıları her zaman verilmeyebilir. Bu durumda da bu iki üçgenin eş olup olmadığına karar verebiliriz. Bunun için aşağıdaki eşlik kurallarını kullanırız. Eğer iki üçgen arasında bu kurallardan biri sağlanıyorsa bu iki üçgen eştir diyebiliriz.

Kenar-Kenar-Kenar Eşlik Kuralı (K.K.K.)

İki üçgen arasında yapılan bire bir eşlemede karşılıklı tüm kenarlarının uzunlukları eşit ise bu üçgenler eş üçgenlerdir.



Şekildeki ABC üçgeninde

$|AB| = a$ birim, $|AC| = b$ birim, $|BC| = c$ birim

EDF üçgeninde

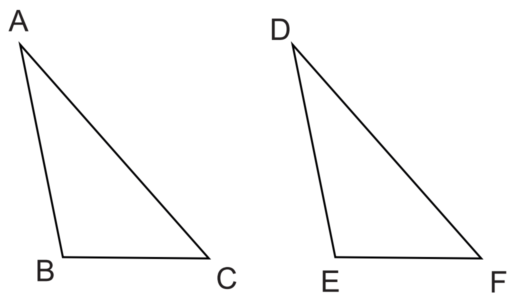
$|DE| = a$ birim, $|EF| = b$ birim, $|DF| = c$ birim

verilsin.

ABC ve EDF üçgenleri arasında yapılan bire bir eşlemede karşılıklı tüm kenarlarının uzunlukları eşit olduğundan ABC ile EDF eş üçgenler olup bu eşlik $\widehat{ABC} \cong \widehat{EDF}$ biçiminde gösterilir.

Burada $|AB| = |DE|$ olduğundan ABC üçgeninde AB kenarı karşısındaki C açısının ölçüsü, DEF üçgeninde DE kenarı karşısındaki F açısının ölçüsüne eşittir. Benzer şekilde A açısının ölçüsü, E açısının ölçüsüne ve B açısının ölçüsü de D açısının ölçüsüne eşittir.

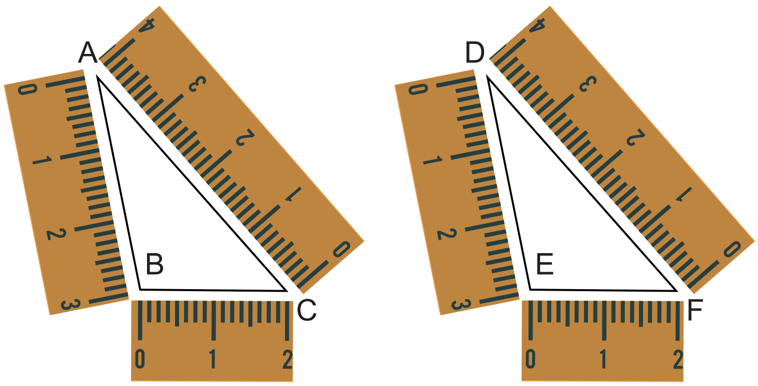
ÖRNEK



Şekildeki ABC üçgeni ile DEF üçgeninin eş üçgenler olduğunu cetvel yardımıyla ölçümler yaparak bulunuz.

ÇÖZÜM

ABC üçgeni ile DEF üçgeninin kenar uzunlukları cetvel yardımıyla ölçülürse



$|AB| = |DE| = 3$ cm

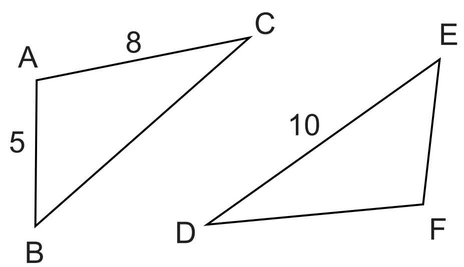
$|AC| = |DF| = 4$ cm

$|BC| = |EF| = 2$ cm

olduğu görülür.

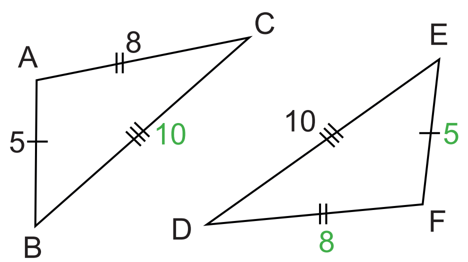
ABC üçgeni ile DEF üçgeni arasında yapılan bire bir eşlemede karşılıklı tüm kenarlarının uzunlukları eşit olduğundan $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ olur.

ÖRNEK



Şekildeki ABC üçgeninde $|AB| = 5$ cm, $|AC| = 8$ cm ve DEF üçgeninde $|DE| = 10$ cm dir. $\widehat{ABC} \cong \widehat{FED}$ olduğuna göre $[BC]$,$[FE]$ ve $[FD]$ nın uzunlukları kaçar cm dir?

ÇÖZÜM



$\widehat{ABC} \cong \widehat{FED}$ olduğundan

$|AB| = |FE| = 5$ cm

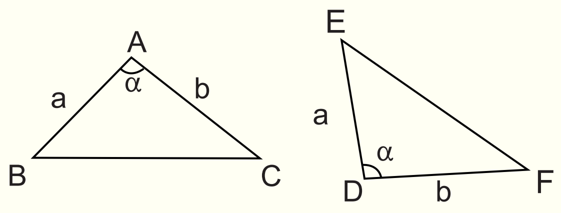
$|AC| = |FD| = 8$ cm

$|BC| = |ED| = 10$ cm

bulunur.

Kenar-Açı-Kenar Eşlik Kuralı (K.A.K.)

İki üçgen arasında yapılan bire bir eşlemede karşılıklı ikişer kenar uzunlukları ve bu iki kenar arasında kalan açılarının ölçüleri eşit ise bu üçgenler eş üçgenlerdir.



Şekildeki üçgenlerde

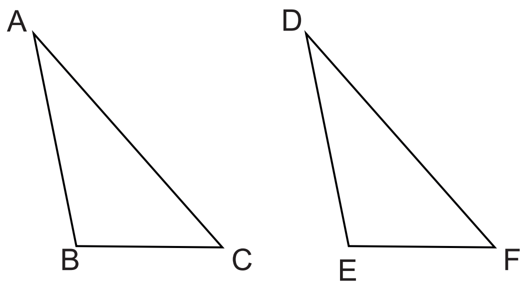
$|AB| = |DE| = a$ birim

$|AC| = |DF| = b$ birim

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) = \alpha$

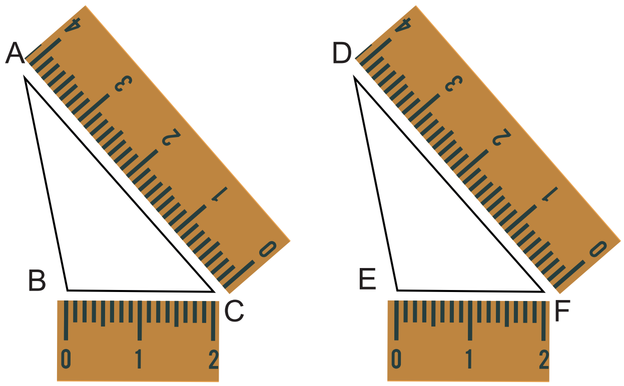
olduğundan $\overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{DEF}$ olur.

ÖRNEK



Şekildeki ABC üçgeni ile DEF üçgeninin eş üçgenler olduğunu açıölçer ve cetvel yardımıyla ölçümler yaparak bulunuz.

ÇÖZÜM

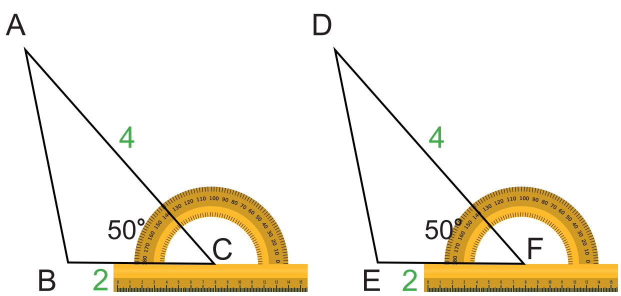


ABC ile DEF üçgeninin ikişer kenar uzunlukları cetvel yardımıyla ölçülürse

$|AC| = |DF| = 4$ cm

$|BC| = |EF| = 2$ cm

olduğu görülür.

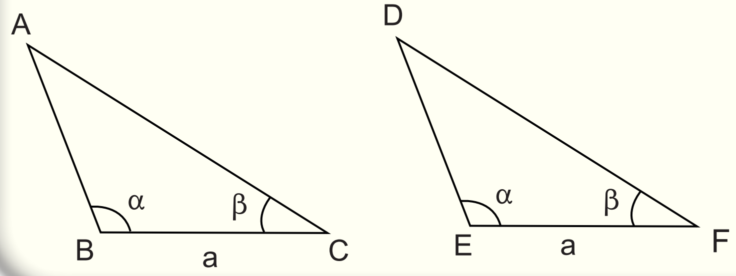


ABC üçgeninde BCA açısı ve DEF üçgeninde DFE açısı açıölçer yardımıyla ölçülürse $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{DFE}) = 50°$ olduğu görülür.

ABC ve DEF üçgenleri arasında yapılan bire bir eşlemede karşılıklı ikişer kenar uzunlukları ve bu iki kenar arasında kalan açılarının ölçüleri eşit olduğundan bu üçgenler eş üçgenlerdir. Bu üçgenlerin üçüncü kenarları da cetvelle ölçülecek olursa bu kenar uzunluklarının da eşit olduğu görülür.

Açı-Kenar-Açı Eşlik Kuralı (A.K.A.)

İki üçgen arasında yapılan bire bir eşlemede karşılıklı ikişer açının ölçüleri ve bu iki açı arasında kalan kenar uzunlukları eşit ise bu üçgenler eş üçgenlerdir.



Şekildeki üçgenlerde

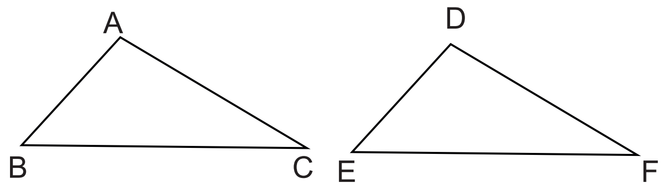
$m(\widehat{B}) = m(\widehat{E}) = \alpha$

$m(\widehat{C}) = m(\widehat{F}) = \beta$

$|BC| = |EF| = a$ birim

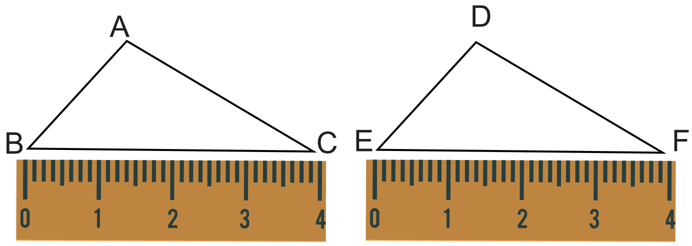
olduğundan $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ olur.

ÖRNEK



Şekildeki ABC üçgeni ile DEF üçgeninin eş üçgenler olduğunu açıölçer ve cetvel yardımıyla ölçümler yaparak bulunuz.

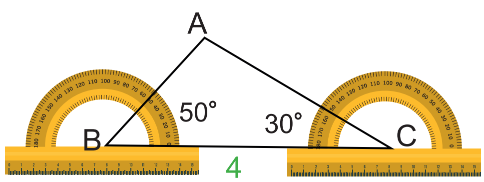
ÇÖZÜM

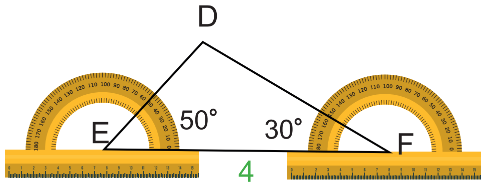


ABC ile DEF üçgeninin [BC] ve [EF] kenarları cetvel yardımıyla ölçülürse

$|BC| = |EF| = 4$ cm

olduğu görülür.





ABC üçgeninde ABC ile ACB açıları ve DEF üçgeninde DEF ile DFE açıları açıölçer yardımıyla ölçülürse

$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DEF}) = 50°$

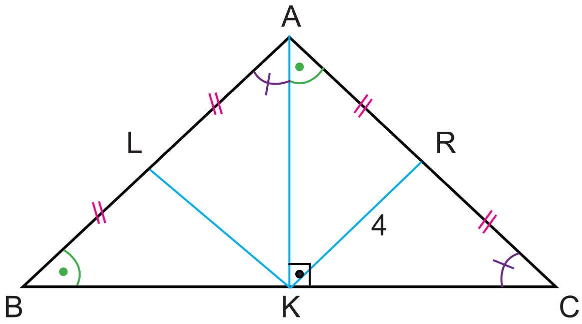
$m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{DFE}) = 30°$

olduğu görülür.

ABC ve DEF üçgenleri arasında yapılan bire bir eşlemede karşılıklı ikişer açının ölçüleri ve bu iki açı arasında kalan kenar uzunlukları eşit olduğundan bu üçgenler eş üçgenlerdir.

Bu üçgenlerin diğer kenarları da cetvelle ölçülecek olursa bu kenar uzunluklarının da eşit olduğu görülür.

ÖRNEK



Şekildeki ABC üçgeninde A, L ve B noktaları; B, K ve C noktaları; A, R ve C noktaları doğrusaldır.

$|KR| = 4$ cm,

$|AL| = |LB| = |AR| = |RC|$, $[AK] \perp [BC]$,

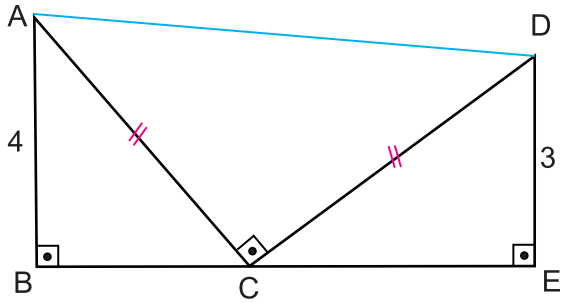
$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{CAK})$ ve $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{BAK})$

olduğuna göre $|KL|$ kaç cm dir?

ÇÖZÜM

$m(\widehat{B}) = m(\widehat{CAK})$, $m(\widehat{C}) = m(\widehat{BAK})$ ve $|AB| = |AC|$ olduğundan A.K.A. eşlik kuralına göre $\overset{\triangle}{ABK} \cong \overset{\triangle}{CAK}$ olur. Eş üçgenlerin karşılıklı yardımcı elemanları da eştir. ABK üçgeninin AB kenarına ait kenarortayı olan LK doğru parçasının uzunluğu, CAK üçgeninin AC kenarına ait kenarortayı olan KR doğru parçasının uzunluğuna eşit olacağından $|KL| = 4$ cm olur.

ÖRNEK



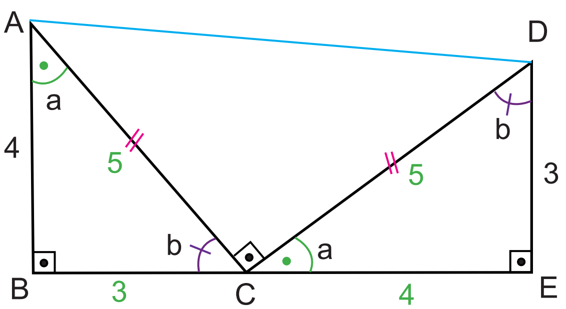
Şekilde ABC ve DCE birer dik üçgendir. B, C ve E noktaları doğrusaldır.

$[AB] \perp [BE]$, $[DE] \perp [BE]$, $[AC] \perp [DC]$,

$|AC| = |CD|$, $|AB| = 4$ cm ve $|DE| = 3$ cm

olduğuna göre $|AD|$ kaç cm dir?

ÇÖZÜM



ABC üçgeninde $m(\widehat{BAC}) = a$ ve $m(\widehat{ACB}) = b$ denirse $a + b = 90°$ olur.

$m(\widehat{BCE}) = 180°$ olduğundan $m(\widehat{DCE}) = a$ ve $m(\widehat{CDE}) = b$ olur ve $|AC| = |CD|$ olduğu da göz önünde bulundurulursa ABC ve CED üçgenleri A.K.A eşlik kuralı gereği eş üçgenlerdir. Bu durumda

$|AB| = |CE| = 4$ cm

$|BC| = |DE| = 3$ cm olur.

ABC ve CED üçgenlerinde Pisagor teoreminden $|AC| = |CD| = 5$ cm olur.

ACD üçgeninde Pisagor teoreminden

$$|AD|^2 = |AC|^2 + |CD|^2 \Rightarrow |AD|^2 = 5^2 + 5^2$$

$$\Rightarrow |AD|^2 = 50$$

$$\Rightarrow |AD| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ cm bulunur.}$$

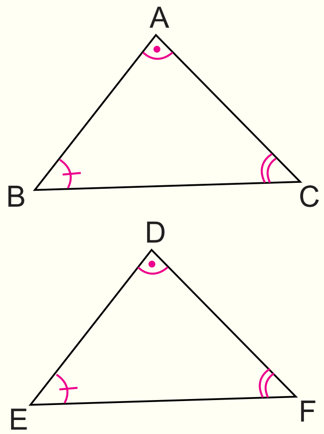
2.2.2. İki Üçgenin Benzer Olması İçin Gerekli Asgari Koşullar

Bir şeklin belli bir oranda büyütülmesi veya küçültülmesi ile oluşan şekle bu şeklin benzeri denir.

Maket arabalar, maket uçaklar, maket gemiler, asıllarının belirli bir oranda küçültülmesi ile oluşur. Örneğin İstanbul'daki Miniatürk, tarihi eserlerin minyatürlerinin bulunduğu yerdir. Hepsi gerçekleri ile benzerdir.

Görsel 2.9

İki üçgen arasında yapılan bire bir eşlemede, karşılıklı açıları eş veya karşılıklı kenarlarının uzunlukları orantılı olan üçgenlere **benzer üçgenler** denir. Benzerlik " $\sim$ " sembolü ile gösterilir.



$\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{DEF}$ ise

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{D})$

$m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$

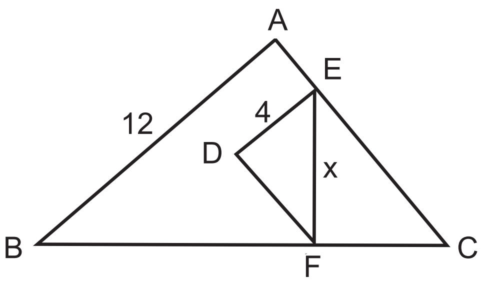
$m(\widehat{C}) = m(\widehat{F})$

olur. Bu durumda üçgenlerin karşılıklı kenarları orantılıdır.

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|} = k$$

Burada karşılıklı kenarların oranı olan k sayısına benzerlik oranı denir. $k = 1$ ise üçgenler eştir.

ÖRNEK



Şekilde ABC ve DEF birer üçgendir.
ABC üçgeninde $|AB| = 12$ cm ve $|BC| = 9$ cm
DEF üçgeninde $|DE| = 4$ cm ve $|EF| = x$ cm
olarak veriliyor.

$\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{DEF}$ olduğuna göre x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{DEF} \Rightarrow \dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|BC|}{|EF|}$

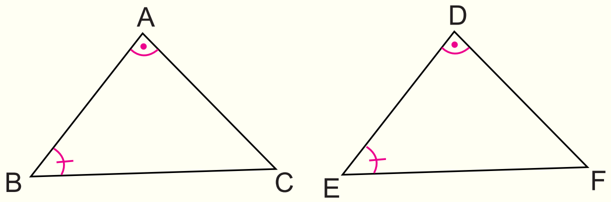
$\Rightarrow \dfrac{12}{4} = \dfrac{9}{x}$

$\Rightarrow 12x = 36$

$\Rightarrow x = 3$ bulunur.

Üçgende Açı Açı Benzerliği

İki üçgen arasında yapılan bire bir eşlemede karşılıklı iki açısı eş olan üçgenler benzerdir.



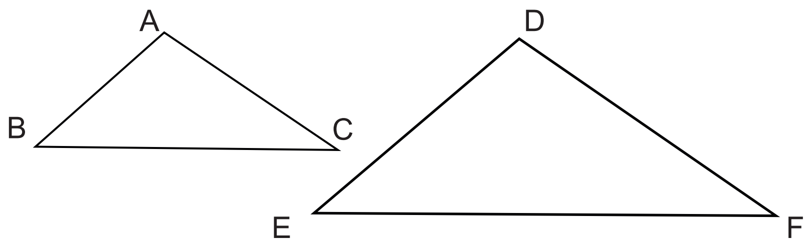
Yandaki ABC ve DEF üçgenlerinde

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{D})$ ve $m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$

olduğundan $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ olur.

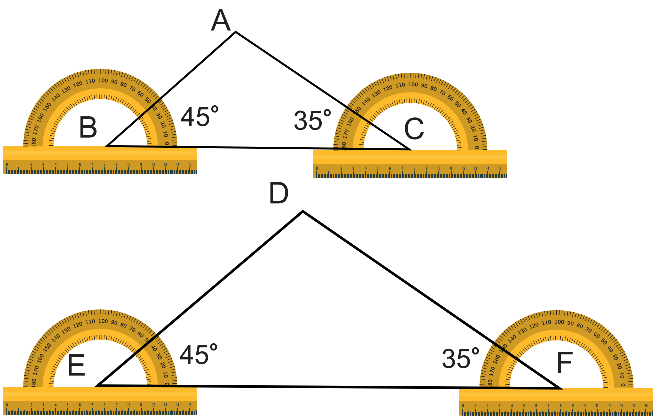
Bu durumda k orantı sabiti olmak üzere $\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|AC|}{|DF|} = \dfrac{|BC|}{|EF|} = k$ olur.

ÖRNEK



Şekildeki ABC üçgeni ile DEF üçgeninin benzer üçgenler olduğunu açıölçer ve cetvel yardımıyla ölçümler yaparak bulunuz.

ÇÖZÜM



ABC üçgeninde ABC ile ACB açıları ve DEF üçgeninde DEF ile DFE açıları açıölçer yardımıyla ölçülürse

$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DEF}) = 45°$

$m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{DFE}) = 35°$

olduğu görülür.

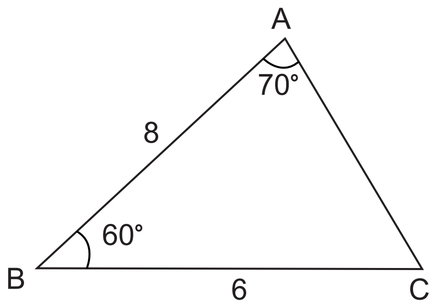
ABC ve DEF üçgenleri arasında yapılan bire bir eşlemede karşılıklı ikişer açının ölçüleri ve bu iki açı arasında kalan kenar uzunlukları eşit olduğundan bu üçgenler benzer üçgenlerdir.

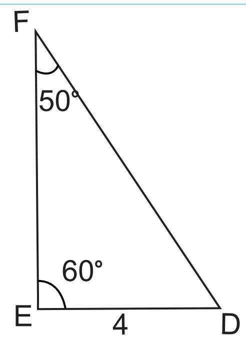
Bu üçgenlerin kenar uzunlukları cetvelle ölçülecek olursa

$\dfrac{|BC|}{|EF|} = \dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|AC|}{|DF|} = \dfrac{2}{3}$

olduğu görülür. Bu durumda karşılıklı olarak ikişer açısının ölçüsü eşit olan ABC üçgeni ile DEF üçgenleri benzerdir.

ÖRNEK





ABC üçgeninde

$m(\widehat{A}) = 70^\circ$, $m(\widehat{B}) = 60^\circ$,

$|AB| = 8$ cm, $|BC| = 6$ cm

DEF üçgeninde

$m(\widehat{F}) = 50^\circ$, $m(\widehat{E}) = 60^\circ$,

$|DE| = 4$ cm

olduğuna göre $|EF|$ kaç cm dir?

ÇÖZÜM

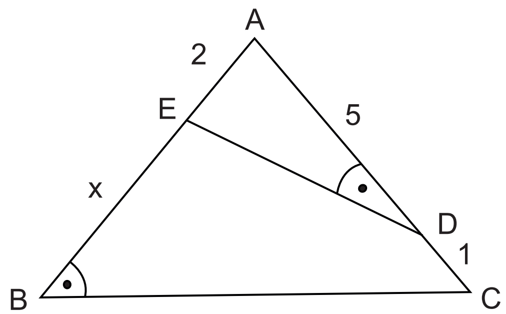
ABC üçgeninde $m(\widehat{C}) = 50^\circ$ ve DEF üçgeninde $m(\widehat{D}) = 70^\circ$ olduğundan A.A. benzerlik teoremine göre $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ olur.

$$\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF} \Leftrightarrow \frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{4} = \frac{6}{|EF|}$$

$$\Leftrightarrow 8 \cdot |EF| = 6 \cdot 4 \Rightarrow |EF| = 3 \text{ cm bulunur.}$$

ÖRNEK



Şekildeki ABC üçgeninde A, E ve B; A, D ve C noktaları doğrusaldır.

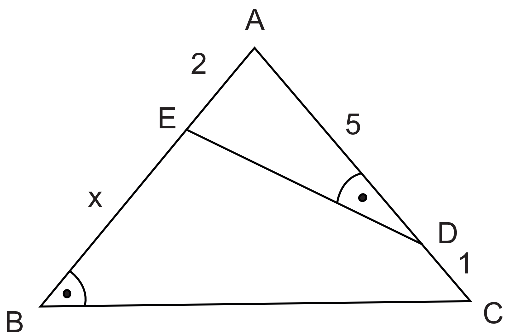
$|AE| = 2$ cm, $|AD| = 5$ cm

$|DC| = 1$ cm, $|BE| = x$ cm .

$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ADE})$

olduğuna göre x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



ADE ve ABC üçgenlerinin A köşeleri ortak olduğundan $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{EAD})$ olur. Ayrıca soruda $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ADE})$ olarak verildiğinden ADE ile ABC üçgenleri açı açı benzerlik kuralına göre benzerdirler.

Bu durumda $\widehat{ABC} \sim \widehat{ADE}$ olur. Buradan

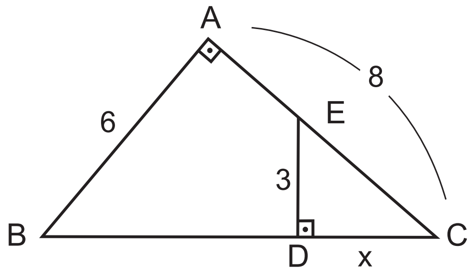
$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|} \Rightarrow \frac{2+x}{5} = \frac{6}{2}$$

$$\Rightarrow 4 + 2x = 30$$

$$\Rightarrow 2x = 26$$

$$\Rightarrow x = 13 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK



Şekildeki ABC üçgeninde A, E ve C; B, D ve C noktaları doğrusaldır. ABC ve DEC birer dik üçgen

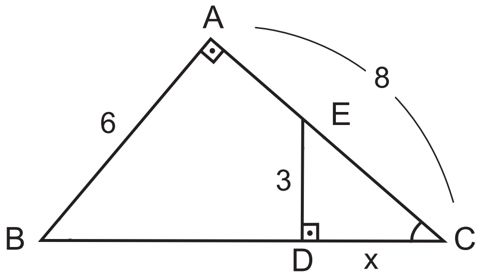
$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{EDC}) = 90°$

$|AB| = 6$ cm, $|AC| = 8$ cm,

$|ED| = 3$ cm, $|DC| = x$ cm

olduğuna göre x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

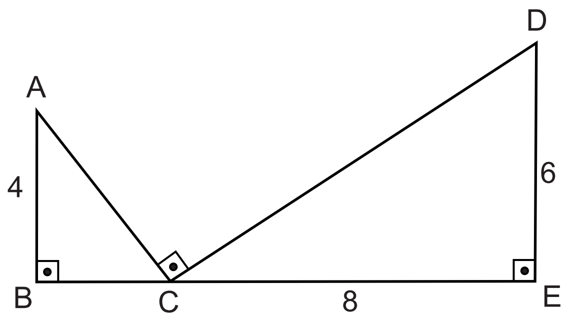


ABC ve DEC üçgenlerinin C köşeleri ortak olduğundan $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{DCE})$ olur. Ayrıca soruda $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{EDC}) = 90°$ olarak verildiğinden ABC ve DEC üçgenleri açı açı benzerlik kuralına göre benzerdirler.

Bu durumda $\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{DEC}$ olur. Buradan

$\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|AC|}{|DC|} \Rightarrow \dfrac{6}{3} = \dfrac{8}{x} \Rightarrow x = 4$ bulunur.

ÖRNEK



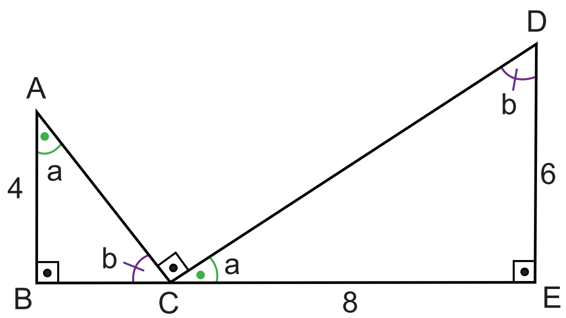
Şekilde ABC ve DCE birer dik üçgendir. B, C ve E noktaları doğrusaldır.

$[AB] \perp [BE]$, $[DE] \perp [BE]$, $[AC] \perp [DC]$, ,

$|AB| = 4$ cm, $|DE| = 6$ cm, $|CE| = 8$ cm

olduğuna göre $|BC|$ kaç cm dir?

ÇÖZÜM



ABC üçgeninde $m(\widehat{BAC}) = a$ ve $m(\widehat{ACB}) = b$ denirse $a + b = 90°$ olur.

$m(\widehat{BCE}) = 180°$ olduğundan $m(\widehat{DCE}) = a$ ve $m(\widehat{CDE}) = b$ olur. Bu durumda ABC ve CED üçgenlerinin A.A. benzerlik kuralı gereğince benzer üçgenler olduğu görülür. Bu durumda

$\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{CED} \Rightarrow \dfrac{|AB|}{|CE|} = \dfrac{|BC|}{|DE|}$

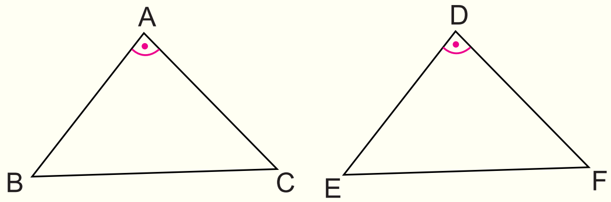
$\Rightarrow \dfrac{4}{8} = \dfrac{|BC|}{6}$

$\Rightarrow 8 \cdot |BC| = 24$

$\Rightarrow |BC| = 3$ cm bulunur.

Üçgende Kenar Açı Kenar Benzerliği (K.A.K.)

İki üçgenin karşılıklı ikişer kenarlarının uzunlukları orantılı ve bu orantılı kenarlar arasındaki açıların ölçüleri eşit ise bu üçgenler benzerdir.



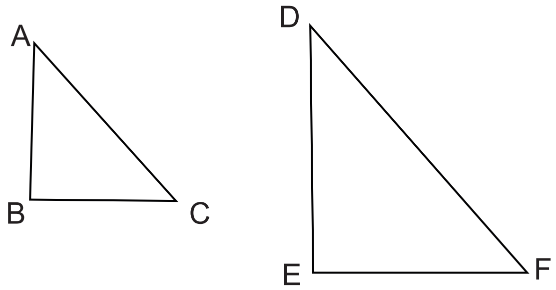
Yandaki ABC ve DEF üçgenlerinde

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{D})$ ve $\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|AC|}{|DF|}$

oluyorsa $\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{DEF}$ olur.

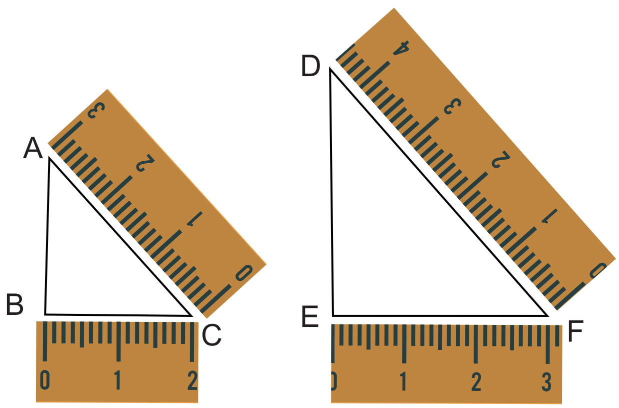
Bu durumda k orantı sabiti olmak üzere $\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|AC|}{|DF|} = \dfrac{|BC|}{|EF|} = k$ olur.

ÖRNEK



Şekildeki ABC üçgeni ile DEF üçgeninin benzer üçgenler olduğunu açıölçer ve cetvel yardımıyla ölçümler yaparak bulunuz.

ÇÖZÜM

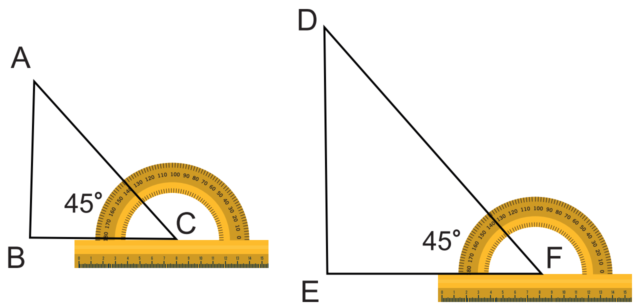


ABC ile DEF üçgeninin ikişer kenar uzunlukları cetvel yardımıyla ölçülürse

$|BC| = 2$ cm, $|AC| = 3$ cm

$|EF| = 3$ cm, $|DF| = 4,5$ cm

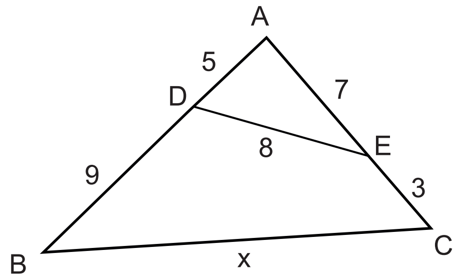
olur. Buradan $\dfrac{|AC|}{|DF|} = \dfrac{|BC|}{|EF|} = \dfrac{2}{3}$ olduğu görülür.



ABC üçgeninde BCA açısı ve DEF üçgeninde DFE açısı açıölçer yardımıyla ölçülürse $m(\overset{\frown}{ACB}) = m(\overset{\frown}{DFE}) = 45°$ olduğu görülür.

ABC ve DEF üçgenlerinin ikişer kenarlarının uzunlukları orantılı ve bu orantılı kenarlar arasındaki açıların ölçüleri eşit olduğundan bu üçgenler benzerdir. Cetvel yardımıyla üçgenlerin diğer kenarları da ölçülürse $\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{2}{3}$ olduğu görülür. Bu durumda karşılıklı ikişer kenarlarının uzunlukları orantılı ve bu orantılı kenarlar arasındaki açıların ölçüleri eşit olduğundan bu üçgenler benzerdir.

Örnek

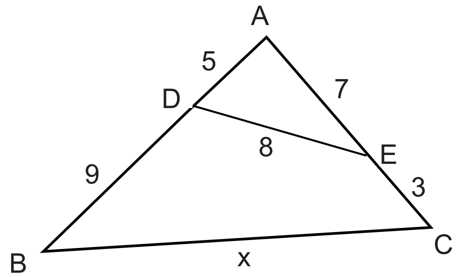


Şekildeki ABC üçgeninde A, E ve C; A, D ve B noktaları doğrusaldır.

$|AD| = 5$ cm, $|BD| = 9$ cm, $|AE| = 7$ cm, $|ED| = 8$ cm, $|EC| = 3$ cm ve $|BC| = x$ cm olduğuna göre x değerini bulunuz.

Çözüm

$\widehat{ABC}$ ve $\widehat{AED}$ üçgenlerinin A açıları ortak ve $\dfrac{|AB|}{|AE|} = \dfrac{|AC|}{|AD|}$ olduğundan $\widehat{ABC} \sim \widehat{AED}$ olur.



$\widehat{ABC} \sim \widehat{AED}$ olduğundan $\dfrac{|AB|}{|AE|} = \dfrac{|AC|}{|AD|} = \dfrac{|BC|}{|ED|}$ olur.

Buradan

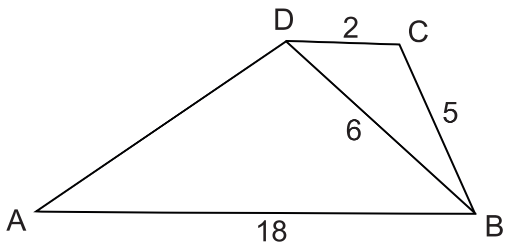
$$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|ED|} \Rightarrow \frac{14}{7} = \frac{x}{8}$$

$$\Rightarrow 7 \cdot x = 14 \cdot 8$$

$$\Rightarrow 7x = 112$$

$\Rightarrow x = 16$ bulunur.

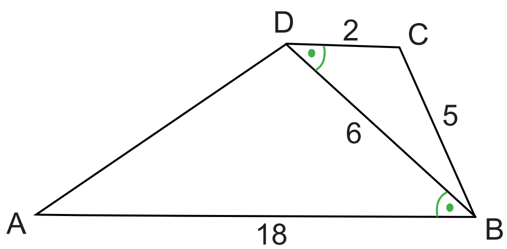
Örnek



Şekilde DAB ve CBD birer üçgendir.

$[AB] \parallel [DC]$, $|DC| = 2$ cm, $|BC| = 5$ cm, $|DB| = 6$ cm, $|AB| = 18$ cm olduğuna göre $|AD|$ kaç cm dir?

Çözüm



$[AB] \parallel [DC]$ olduğundan $m(\widehat{CDB}) = m(\widehat{DBA})$ ve $\widehat{DAB}$ ile $\widehat{CBD}$ nde

$\dfrac{|DB|}{|CD|} = \dfrac{6}{2} = 3$ ve $\dfrac{|AB|}{|BD|} = \dfrac{18}{6} = 3$

olduğundan K.A.K. benzerlik kuralı gereği DAB üçgeni ile CBD üçgeni benzerdir.

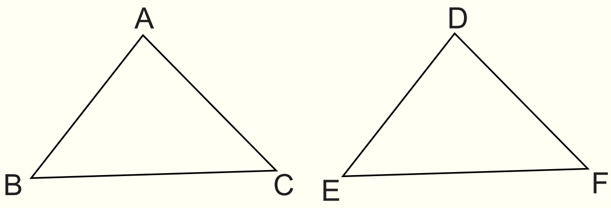
$$\widehat{DAB} \sim \widehat{CBD} \Rightarrow \frac{|AD|}{|BC|} = \frac{|AB|}{|BD|} \Rightarrow \frac{|AD|}{5} = \frac{18}{6}$$

$$\Rightarrow 6 \cdot |AD| = 90$$

$\Rightarrow |AD| = 15$ cm bulunur.

Üçgende Kenar Kenar Kenar Benzerliği (K.K.K.)

İki üçgenin karşılıklı kenar uzunlukları orantılı ise bu üçgenler benzerdir.



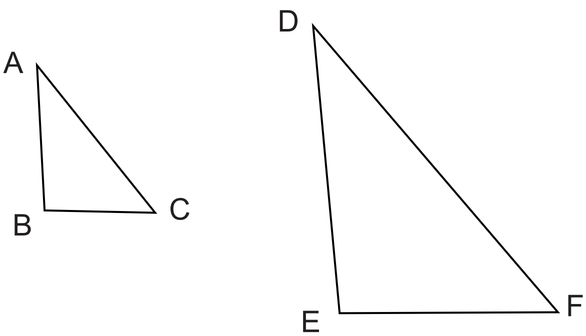
Yandaki ABC ve DEF üçgenlerinde

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|}$$

oluyorsa $\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{DEF}$ olur.

Bu durumda $m(\widehat{A}) = m(\widehat{D})$, $m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$ ve $m(\widehat{C}) = m(\widehat{F})$ olur.

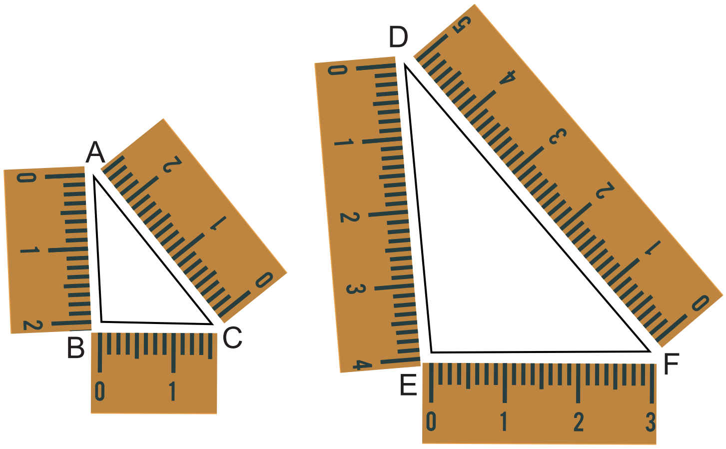
ÖRNEK



Şekildeki ABC üçgeni ile DEF üçgeninin benzer üçgenler olduğunu cetvel yardımıyla ölçümler yaparak bulunuz.

ÇÖZÜM

ABC üçgeni ile DEF üçgeninin kenar uzunlukları cetvel yardımıyla ölçülürse



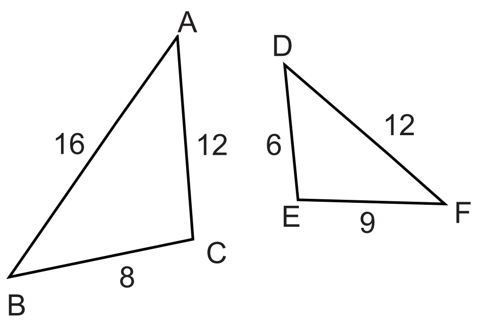
$|AB| = 2$ cm
$|BC| = 1,5$ cm
$|AC| = 2,5$ cm
$|DE| = 4$ cm
$|DF| = 5$ cm
$|EF| = 3$ cm
olur ve buradan

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{1}{2}$$

olduğu görülür.

Buna göre ABC üçgeni ile DEF üçgeni benzerdir.
Bu durumda iki üçgenin karşılıklı kenar uzunlukları orantılı olduğundan bu üçgenler benzerdir.

ÖRNEK



ABC üçgeninde
$|AB| = 16$ cm, $|AC| = 12$ cm, $|BC| = 8$ cm,
DEF üçgeninde
$|DE| = 6$ cm, $|EF| = 9$ cm, $|DF| = 12$ cm,
olduğuna göre

I. $m(\widehat{C}) = m(\widehat{E})$

II. $m(\widehat{B}) = m(\widehat{F})$

III. $m(\widehat{A}) < m(\widehat{D})$

ifadelerinden hangilerinin doğru olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$\dfrac{|AB|}{|FD|} = \dfrac{|BC|}{|DE|} = \dfrac{|AC|}{|FE|}$ olduğundan $\widehat{ABC} \sim \widehat{FDE}$ olur.

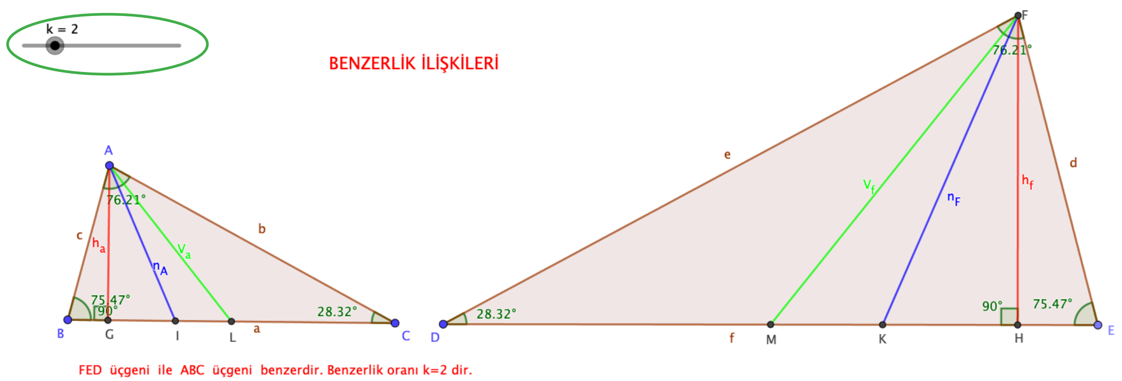
Bu durumda $m(\widehat{A}) = m(\widehat{F})$, $m(\widehat{B}) = m(\widehat{D})$ ve $m(\widehat{C}) = m(\widehat{E})$ olur. Buradan I. doğrudur.
Ayrıca üçgenlerin açı kenar ilişkilerinden $m(\widehat{A}) < m(\widehat{B}) < m(\widehat{C})$ ve $m(\widehat{F}) < m(\widehat{D}) < m(\widehat{E})$ olur.
Buna göre $m(\widehat{A}) < m(\widehat{B})$ ve $m(\widehat{B}) = m(\widehat{D})$ olduğundan $m(\widehat{A}) < m(\widehat{D})$ olup III. doğrudur.

Benzer Üçgenlerde Yardımcı Elemanlar Arasındaki İlişki

Aşağıdaki karekod okutulduğunda veya linke tıklandığında ekranda şekildeki gibi bir dinamik matematik ve geometri çizim uygulamasında çizilmiş benzer üçgenler görünecektir.

https://www.geogebra.org/m/x9mtv9gv

Uygulama açılınca yeşil elips ile işaretlenmiş sürgüde yazan sayı üçgenlerin benzerlik oranıdır. Bu oran sürgüdeki nokta fare ile tutulup değiştirilebilir. Benzer üçgenlerin karşılıklı yardımcı elemanlarının oranlarının da benzerlik oranına eşit olduğu gözlenir. Ayrıca ABC üçgeninin köşelerini fare ile tutup yer değiştirdiğinizde benzer farklı üçgenlerde aynı durum gözlemlenir.



FED üçgeni ile ABC üçgeni benzerdir. Benzerlik oranı k=2 dir.

$m(\widehat{FED}) = m(\widehat{ABC}) = 75.47°$ $\quad m(\widehat{EFD}) = m(\widehat{BAC}) = 76.21°$ $\quad m(\widehat{FDE}) = m(\widehat{ACB}) = 28.32°$

$\dfrac{f}{a} = \dfrac{48.74}{24.37} = 2$ $\quad \dfrac{e}{b} = \dfrac{48.58}{24.29} = 2$ $\quad \dfrac{d}{c} = \dfrac{23.81}{11.9} = 2$ FED üçgeni ile ABC üçgenini karşılıklı kenarları oranı k=2 dir.

$\dfrac{h_f}{h_a} = \dfrac{23.05}{11.52} = 2$ $\quad \dfrac{n_F}{n_A} = \dfrac{25.14}{12.57} = 2$ $\quad \dfrac{V_f}{V_a} = \dfrac{29.49}{14.74} = 2$ FED üçgeni ile ABC üçgeninin karşılıklı yardımcı elemanları oranı k=2 dir.

2.2.3. Üçgenin Bir Kenarına Paralel ve Diğer İki Kenarı Kesecek Şekilde Çizilen Doğrunun Ayırdığı Doğru Parçaları Arasındaki İlişki

Thales (Tales, MÖ 624-MÖ 547)


Görsel: 2.10

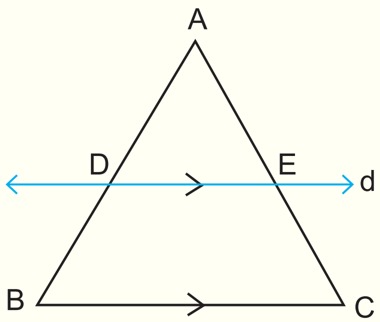
Antik dönemin ünlü filozoflarındandır. Geniş bir araştırma, mühendislik yeteneğine ve ilginç bir ticari zekâya sahip olması ile ün kazanmıştır.

Thales'in astronomide kurucu sayılmasındaki olaylardan birisi Atina'da MÖ 28 Mayıs 585 tarihinde görülebilecek Güneş tutulması olayını tahmin etmesidir.

Matematikte kurucu sayılmasındaki teoremlerden bazıları ise cisimlerin (piramitlerin) gölgesi yardımıyla yüksekliğinin hesabı, üçgenlerin kenarları ile ilgili bağıntılar, ters açıların eşitliği konusu, eşkenar üçgenlerin taban açılarının eşitliği teoremi vb.

Ayrıca güneşin konumuna göre bir insanın boyunun kendi gölgesinin uzunluğuna eşit olduğu anda, piramitlerin gölgelerinin uzunluğunu ölçerek piramitlerin yüksekliklerini hesaplamıştır.

KAYNAK: http://nek.istanbul.edu.tr:4444/ekos/TEZ/38254.pdf



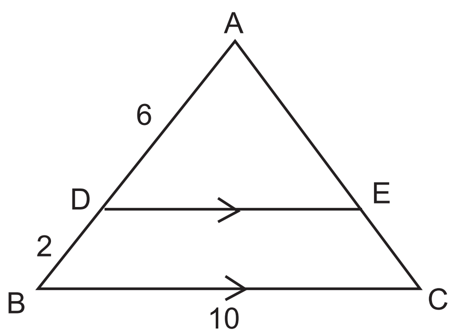
ABC üçgeninin [BC] kenarına paralel olan d doğrusu çizilirse bu doğru [AB] ve [AC] kenarlarını orantılı böler.

$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|}$ olur.

Ayrıca $[BC] \parallel [DE]$ olduğundan $\widehat{ABC} \sim \widehat{ADE}$ olur. Bu durumda

$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|BC|}$ olur.

ÖRNEK



Şekildeki ABC bir üçgeninde A, D ve B; A, E ve C noktaları doğrusaldır.

$[BC] \parallel [DE]$

$|AD| = 6$ cm

$|BD| = 2$ cm

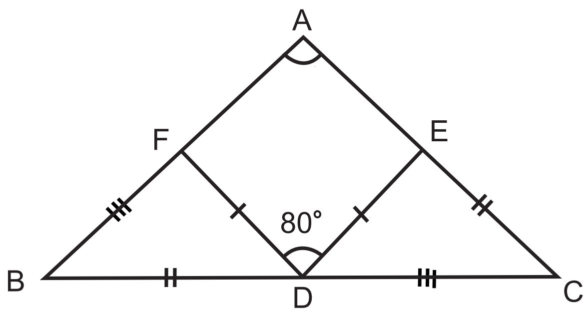
olduğuna göre $|DE|$ kaç cm dir?

ÇÖZÜM

$[BC] \parallel [DE]$ olduğundan $\widehat{ABC} \sim \widehat{ADE}$ olur. Bu durumda

$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|DE|} \Rightarrow \frac{8}{6} = \frac{10}{|DE|} \Rightarrow 8 \cdot |DE| = 60 \Rightarrow |DE| = \frac{60}{8} \Rightarrow |DE| = \frac{15}{2}$ cm bulunur.

ÖRNEK



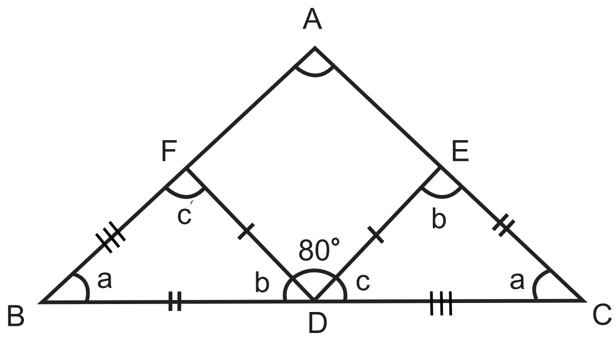
ABC üçgeninde A ,F ve B; A, E ve C; B, D ve C noktaları doğrusaldır.

$|BF| = |DC|$, $|BD| = |EC|$, $|FD| = |ED|$ ve $m(\widehat{FDE}) = 80^\circ$

olduğuna göre $m(\widehat{BAC})$ kaç derecedir?

ÇÖZÜM

FBD ve DCE üçgenleri arasında yapılan bire bir eşlemede karşılıklı tüm kenarlarının uzunlukları eşit olduğundan bu üçgenler eş üçgenlerdir.



FBD üçgeninde

$m(\widehat{FBD}) = a$

$m(\widehat{FDB}) = b$

$m(\widehat{BFD}) = c$

olsun.

FBD ve DCE üçgenlerinde eş kenarların karşılarındaki açıların ölçüleri de eşit olacağından DCE üçgeninde

$m(\widehat{ECD}) = a$

$m(\widehat{DEC}) = b$

$m(\widehat{EDC}) = c$ olur.

Şeklilde $m(\widehat{BDC}) = 180°$ olduğundan $b + c + 80^\circ = 180^\circ \Rightarrow b + c = 100^\circ$ olur.

DCE üçgeninde

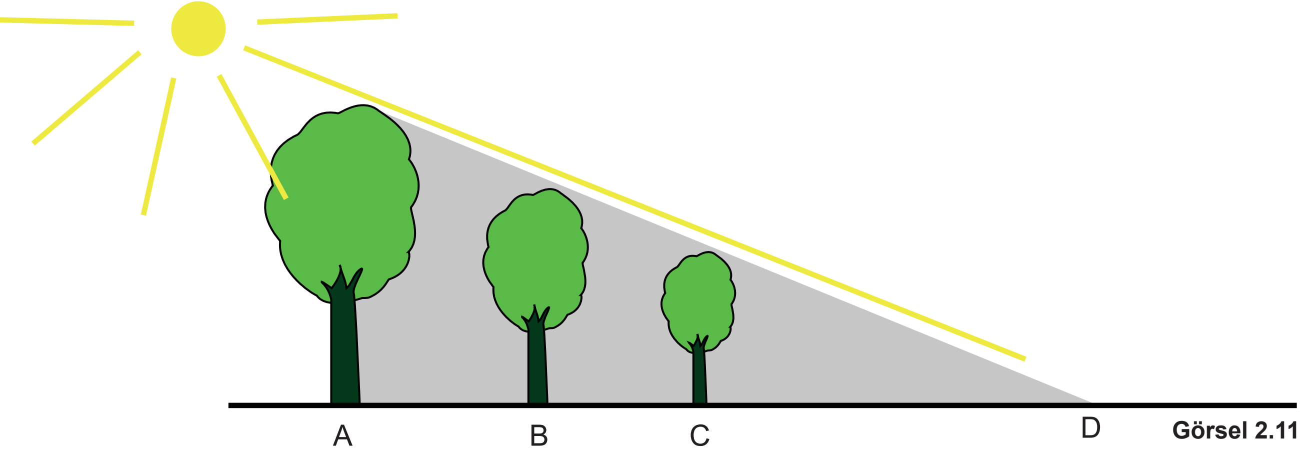
$$a + b + c = 180^\circ \Rightarrow a + 100^\circ = 180^\circ$$
$$\Rightarrow a = 80^\circ \text{ olur.}$$

ABC üçgeninde

$$m(\widehat{A}) + a + a = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{A}) + 80^\circ + 80^\circ = 180^\circ$$
$$\Rightarrow m(\widehat{A}) + 160^\circ = 180^\circ$$
$$\Rightarrow m(\widehat{A}) = 20^\circ \text{ bulunur.}$$

2.2.4. Üçgenlerin Benzerliği ile İlgili Problemler

ÖRNEK



Görsel 2.11

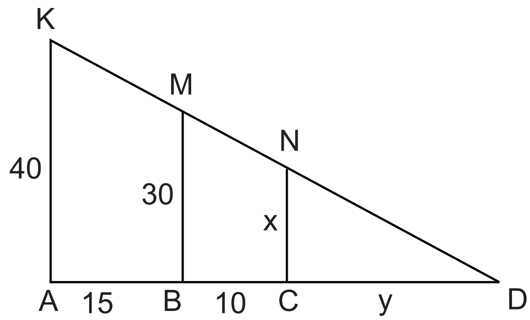
Yukarıdaki görselde batmakta olan güneş, yan yana olan A, B ve C ağaçları ile şekilde görüldüğü gibi bir gölge oluşturmaktadır. A ağacının boyu 40 metre ve B ağacının boyu 30 metredir. A ağacı ile B ağacı arasındaki uzaklık 15 metre ve B ağacı ile C ağacı arasındaki uzaklık 10 metredir. Buna göre

a) C ağacının gölgesinin uzunluğu olan $|CD|$ kaç metredir?

b) C ağacının boyu kaç metredir?

ÇÖZÜM

a) A, B ve C ağaçlarının tepe noktaları sırasıyla K, M ve N noktaları olsun.



$[KA] \parallel [MB]$ olduğundan $\widehat{DBM} \sim \widehat{DAK}$ olur.

$$\widehat{DBM} \sim \widehat{DAK} \Rightarrow \frac{|BM|}{|AK|} = \frac{|DB|}{|DA|}$$
$$\Rightarrow \frac{30}{40} = \frac{y+10}{y+25}$$
$$\Rightarrow 30 \cdot (y+25) = 40 \cdot (y+10)$$
$$\Rightarrow 30y + 750 = 40y + 400$$
$$\Rightarrow 750 - 400 = 40y - 30y$$
$$\Rightarrow 350 = 10y$$
$$\Rightarrow y = 35 \text{ m olur.}$$

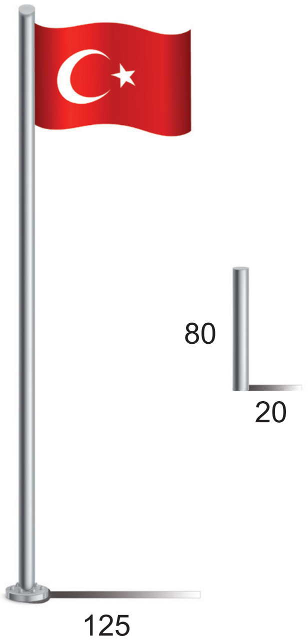
Bu durumda C ağacının gölgesinin uzunluğu olan $|CD|$ 35 metre bulunur.

b) $[MB] \parallel [NC]$ olduğundan $\widehat{DCN} \sim \widehat{DBM}$ olur.

$$\widehat{DCN} \sim \widehat{DBM} \Rightarrow \frac{|NC|}{|BM|} = \frac{|DC|}{|DB|} \Rightarrow \frac{x}{30} = \frac{35}{45}$$
$$\Rightarrow 45 \cdot x = 30 \cdot 35$$
$$\Rightarrow x = \frac{70}{3} \text{ m olur.}$$

Bu durumda C ağacının boyu $\frac{70}{3}$ metre bulunur.

ÖRNEK

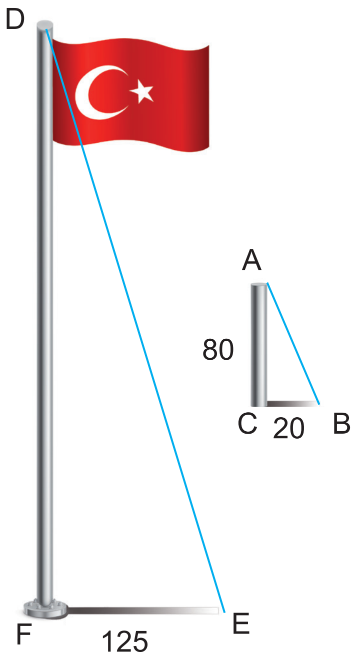


Görsel 2.12

Matematik Öğretmeni Ümit Bey, derste benzerlik konusunu anlattıktan sonra öğrencilerinden okul bahçesindeki bayrak direğinin boyunu benzerlik yardımıyla bulmalarını istiyor.

Öğrenciler yere dik olarak koydukları 80 cm uzunluğundaki çubuğun gölgesini 20 cm ve bayrak direğinin gölgesini 125 cm olarak ölçüyorlar.
Bu ölçümleri yapan öğrenciler bayrak direğinin boyunu kaç metre olarak bulurlar?

ÇÖZÜM



Görsel 2.13

Çubuk ve gölgesinin oluşturduğu ABC üçgeni ile direk ve gölgesinin oluşturduğu üçgenler güneş ışınlarının her iki cisme de aynı açıyla gelmesinden dolayı benzerdir. Bu durumda

$$\widehat{DEF} \sim \widehat{ABC} \Rightarrow \frac{|DF|}{|AC|} = \frac{|EF|}{|BC|}$$

$$\Rightarrow \frac{|DF|}{80} = \frac{125}{20}$$

$$\Rightarrow 20 \cdot |DF| = 125 \cdot 80$$

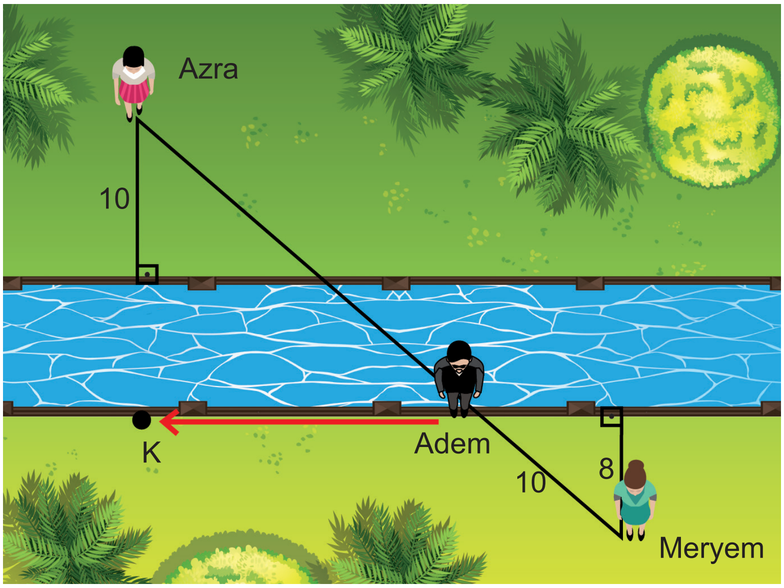
$$\Rightarrow 20 \cdot |DF| = 10000$$

$$\Rightarrow |DF| = 500 \text{ cm olur.}$$

Bu durumda öğrenciler bayrak direğinin boyunu 5 m olarak bulurlar.

2. ÜNİTE: ÜÇGENLER

ÖRNEK



Görsel: 2.14

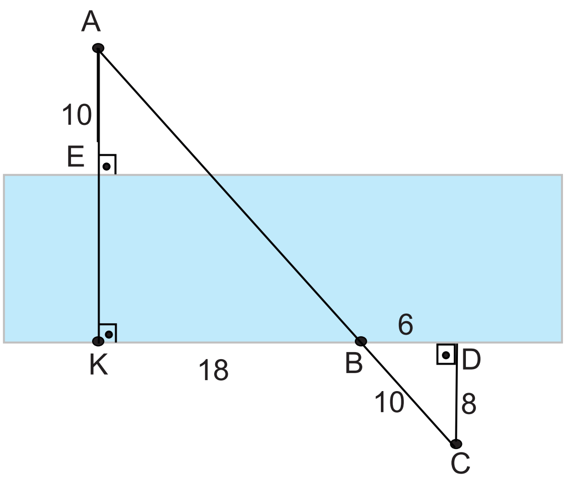
Adem, Azra ve Meryem'in proje ödevinin konusu, mahallelerindeki su kanalının genişliğini benzerlik kullanarak hesaplamaktı.

Kanala giden üç arkadaştan kanalın bir tarafındaki Azra kanala 10 metre uzaklıkta; kanalın diğer tarafındaki Meryem ise kanaldan 8 metre, Meryem'le aynı tarafta ve kanalın sınırında duran Adem'den 10 metre uzaklıktadır.

İlk olarak Azra, Adem ve Meryem doğrusal durumdayken Adem kanalın sınırı boyunca 18 metre yürüyerek geldiği K noktasında Azra ile aynı hizada oluyor.

Buna göre öğrenciler kanalın genişliğini bu verilerle kaç metre olarak bulurlar?

ÇÖZÜM



Azra, Adem ve Meryem'in bulundukları noktalar sırasıyla A, B ve C noktaları olsun. A ile K noktası birleştirilirse $m(\widehat{AKD}) = m(\widehat{CDB}) = 90°$ ve $m(\widehat{ABK}) = m(\widehat{DBC})$ olur. Buradan $\widehat{AKB} \sim \widehat{CDB}$ elde edilir.

$$\widehat{AKB} \sim \widehat{CDB} \Rightarrow \frac{|AK|}{|CD|} = \frac{|KB|}{|DB|}$$

$$\Rightarrow \frac{|KE| + 10}{8} = \frac{18}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{|KE| + 10}{8} = 3$$

$$\Rightarrow |KE| + 10 = 3 \cdot 8$$

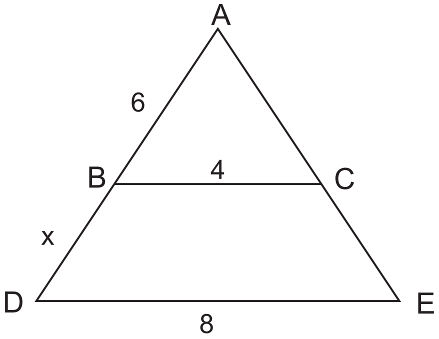
$$\Rightarrow |KE| = 24 - 10$$

$$\Rightarrow |KE| = 14 \text{ m olur.}$$

O hâlde kanalın genişliği 14 metre olarak bulunur.

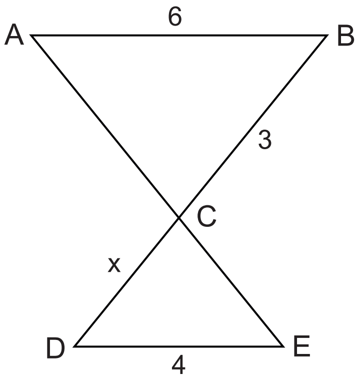
ALIŞTIRMALAR

1.



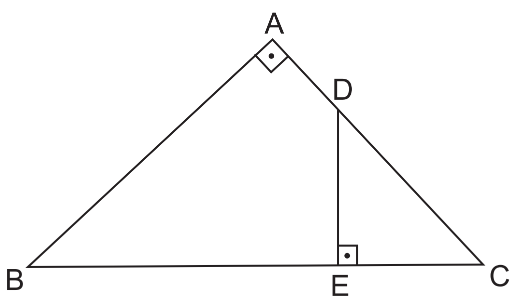
ABC bir üçgen $[BC] \parallel [DE]$, $|AB| = 6$ cm, $|BC| = 4$ cm, $|DE| = 8$ cm, $|BD| = x$ cm olduğuna göre x değerini bulunuz

2.



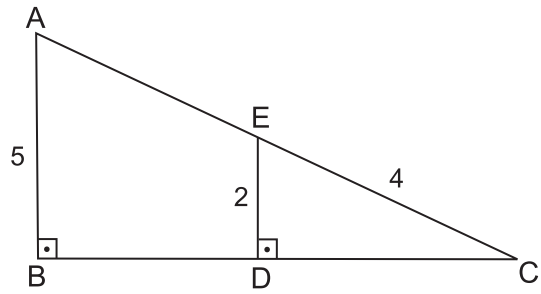
$[AB] \parallel [DE]$, $[AE] \cap [BD] = \{C\}$
$|AB| = 6$ cm, $|BC| = 3$ cm,
$|DE| = 4$ cm, $|DC| = x$ cm
olduğuna göre göre x değerini bulunuz

3.



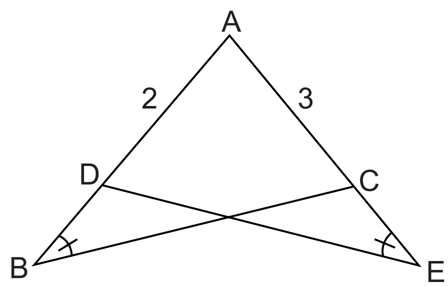
ABC ve DEC birer dik üçgen $[AB] \perp [AC]$, $[ED] \perp [BC]$, $|BC| = 10$ cm ve $|DC| = 4$ cm olduğuna göre $\dfrac{|AB|}{|DE|}$ oranını bulunuz.

4.



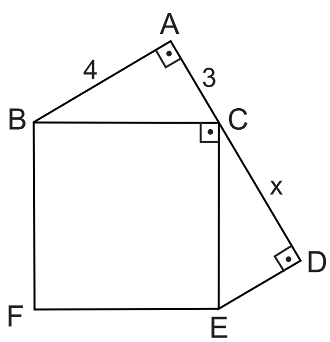
ABC ve EDC birer dik üçgen $[AB] \perp [BC]$, $[ED] \perp [BC]$, $|EC| = 4$ cm, $|ED| = 2$ cm ve $|AB| = 5$ cm olduğuna göre $|AE|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

5.



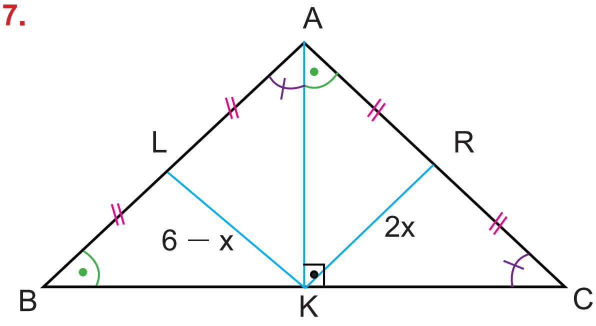
ABC ve ADE birer üçgen $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{AED})$, $|AC| = 3$ cm, $|AD| = 2$ cm olduğuna göre $\dfrac{|BC|}{|DE|}$ oranını bulunuz.

6.



A, C ile D noktaları doğrusaldır. BCEF bir kare $[AB] \perp [AC]$, $[ED] \perp [CD]$, $|AB| = 4$ cm ve $|AC| = 3$ cm olduğuna göre $|CD|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

7.



Şekildeki ABC üçgeninde A, L ve B noktaları; B, K ve C noktaları; A, R ve C noktaları doğrusaldır.

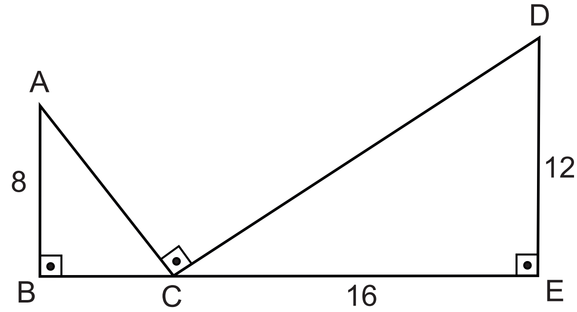
$[AK] \perp [BC]$, $|AL| = |LB| = |AR| = |RC|$,

$|KR| = 2x$ cm, $|LK| = 6 - x$ cm,

$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{CAK})$, $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{BAK})$

olduğuna göre x değerini bulunuz.

9.



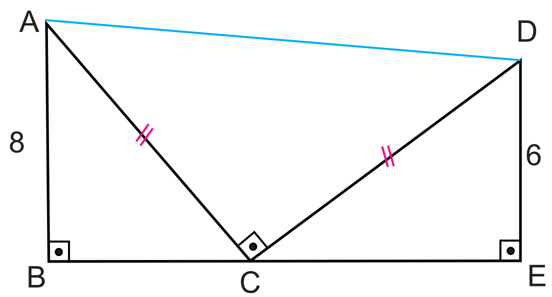
Şekilde ABC ve DCE birer dik üçgendir. B, C ve E noktaları doğrusaldır.

$[AB] \perp [BE]$, $[DE] \perp [BE]$, $[AC] \perp [DC]$, ,

$|AB| = 8$ cm, $|DE| = 12$ cm, $|CE| = 16$ cm

olduğuna göre $|AC|$ kaç cm dir?

8.



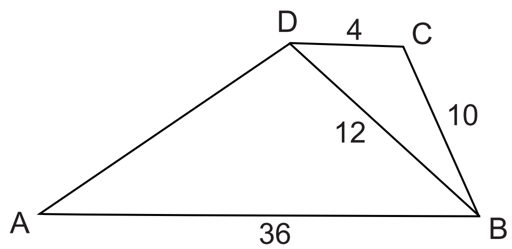
Şekilde ABC ve DCE birer dik üçgendir. B, C ve E noktaları doğrusaldır.

$[AB] \perp [BE]$, $[DE] \perp [BE]$, $[AC] \perp [DC]$,

$|AC| = |CD|$, $|AB| = 8$ cm, $|DE| = 6$ cm

olduğuna göre $|AD|$ kaç cm dir?

10.



Şekilde DAB ve CBD birer üçgendir.

$[AB] \parallel [DC]$, $|DC| = 4$ cm, $|BC| = 10$ cm,

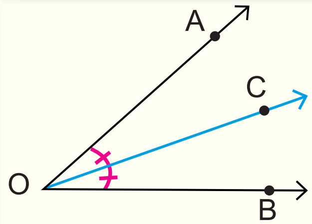
$|DB| = 12$ cm, $|AB| = 36$ cm

olduğuna göre $|AD|$ kaç cm dir?

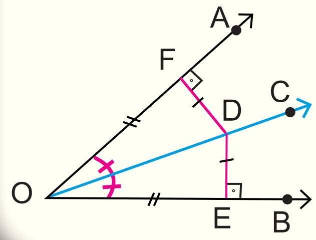
2.3. ÜÇGENİN YARDIMCI ELEMANLARI

2.3.1. Üçgenin İç Açıortayları, Dış Açıortayları ve Özellikleri

Açıortay



Bir açıyı iki eş açıya ayıran ışına **açıortay** denir.
$m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{COB})$ ise $[OC$, $\widehat{AOB}$ nın açıortayıdır.

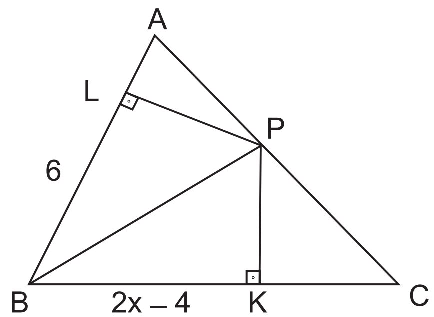


Açıortay üzerinden açının kollarına indirilen dikmelerin uzunlukları eşit olur.

AOB açısının açıortayı $[OC$ olmak üzere

$[OA \perp [DF]$ ve $[OB \perp [DE]$ ise
$|DF| = |DE|$ ve $|OF| = |OE|$ olur.

ÖRNEK

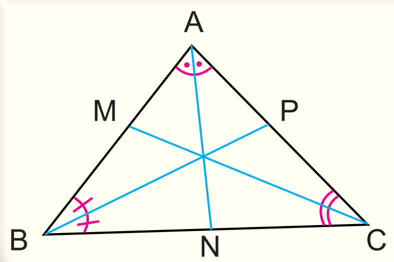


ABC üçgeninde $[BP]$, ABC açısının açıortayıdır.
$[PL] \perp [AB]$
$[PK] \perp [BC]$
$|BL| = 6$ cm
$|BK| = (2x - 4)$ cm
olduğuna göre x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

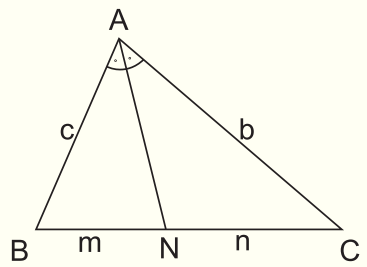
Açıortay üzerinden açının kollarına indirilen dikmelerin ve bu dikmelerin açının kolları üzerinde ayırdığı parçaların uzunlukları eşit olacağından $2x - 4 = 6$ olur. Bu durumda $2x - 4 = 6 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$ bulunur.

İç Açıortay



Bir üçgenin bir iç açısını iki eş açıya ayıran ışına o üçgenin o açısına ait **iç açıortayı** denir. Bir üçgende iç açıortaylar üçgenin içinde bir noktada kesişir ve bu nokta üçgenin iç teğet çemberinin merkezidir. Yandaki ABC üçgeninde
A açısına ait iç açıortay $[AN]$ olup n_A ile
B açısına ait iç açıortay $[BP]$ olup n_B ile
C açısına ait iç açıortay $[CM]$ olup n_C ile gösterilir.

İç Açıortay Teoremi



ABC üçgeninde A açısına ait açıortay doğrusunun [BC] nı kestiği nokta N olsun.

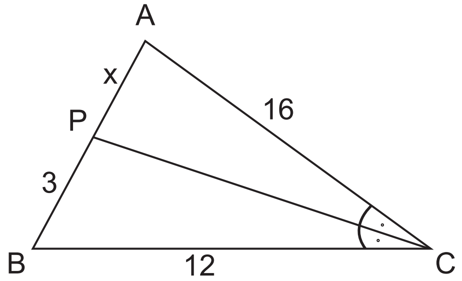
$|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BN| = m$ ve $|NC| = n$

olmak üzere

$$\frac{c}{b} = \frac{m}{n}$$

olur.

ÖRNEK



ABC üçgeninde [PC], ACB açısının iç açıortaydır.

$|AC| = 16$ cm

$|BC| = 12$ cm

$|PB| = 3$ cm

$|AP| = x$ cm

olduğuna göre x değerini bulunuz.

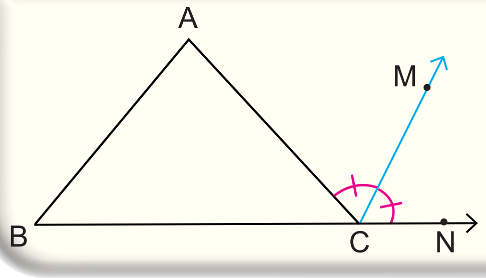
ÇÖZÜM

[PC] iç açıortay olduğundan iç açıortay teoremine göre $\frac{16}{12} = \frac{x}{3} \Rightarrow 12x = 48$

$$x = \frac{48}{12}$$

$$x = 4 \text{ bulunur.}$$

Dış Açıortay



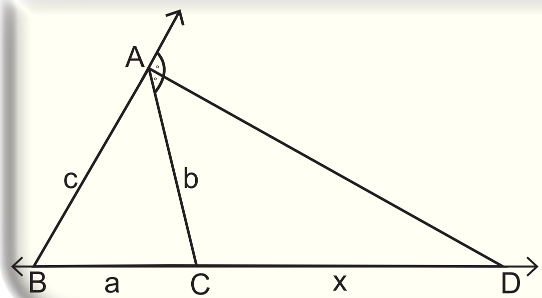
Bir üçgenin bir dış açısını iki eş açıya ayıran ışına o üçgenin o açısına ait **dış açıortayı** denir.

Yandaki ABC üçgeninde C açısına ait dış açıortay [CM olup n'_C ile gösterilir. Benzer şekilde

A açısına ait iç açıortay n'_A ile

B açısına ait iç açıortay n'_B ile gösterilir.

Dış Açıortay Teoremi



ABC üçgeninde A açısına ait dış açıortay doğrusu, BC doğrusunu D noktasında kessin.

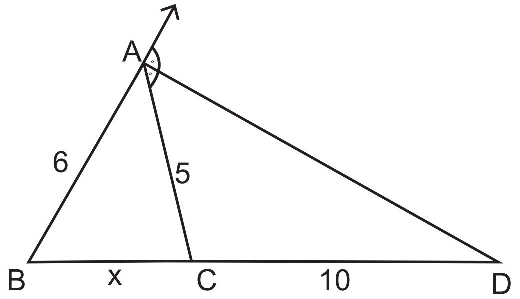
$|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$ ve $|CD| = x$ olsun.

Bu durumda

$$\frac{c}{a+x} = \frac{b}{x}$$

olur.

ÖRNEK



ABC üçgeninde $[AD]$, A açısına ait dış açıortay

$|AB| = 6$ cm

$|AC| = 5$ cm

$|CD| = 10$ cm

$|BC| = x$ cm

olduğuna göre x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$[AD]$ dış açıortay olduğundan dış açıortay teoremine göre

$$\frac{6}{x+10} = \frac{5}{10} \Rightarrow 5(x+10) = 60$$

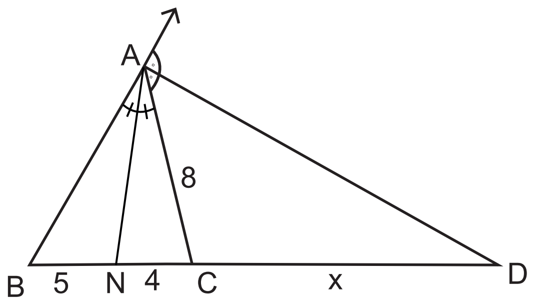
$$5x + 50 = 60$$

$$5x = 60 - 50$$

$$5x = 10$$

$$x = 2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK



ABC üçgeninde A açısına ait iç açıortay $[AN]$ ve dış açıortay $[AD]$ dır.

$|AC| = 8$ cm

$|BN| = 5$ cm

$|NC| = 4$ cm

$|CD| = x$ cm

olduğuna göre x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

ABC üçgeninde iç açıortay teoreminden

$$\frac{|AB|}{5} = \frac{8}{4} \Rightarrow 4 \cdot |AB| = 40$$

$$\Rightarrow |AB| = 10 \text{ olur.}$$

ABC üçgeninde dış açıortay teoreminden

$$\frac{10}{9+x} = \frac{8}{x} \Rightarrow 10x = 8(9+x)$$

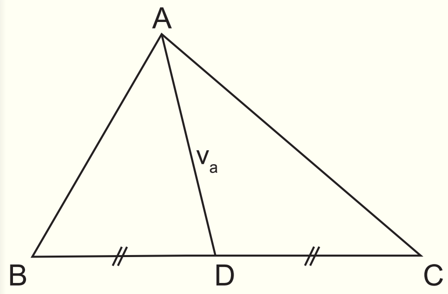
$$\Rightarrow 10x = 72 + 8x$$

$$\Rightarrow 10x - 8x = 72$$

$$\Rightarrow 2x = 72$$

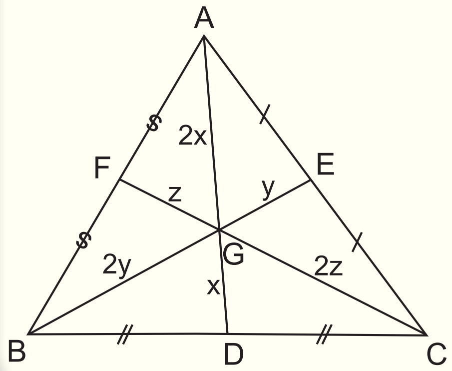
$$\Rightarrow x = 36 \text{ bulunur.}$$

2.3.2. Üçgenin Kenarortayları ve Özellikleri



Bir üçgenin bir köşesinden karşı kenarı iki eş parçaya bölecek şekilde karşı kenarın orta noktasına çizilen doğru parçasına **kenarortay** denir.

Yandaki ABC üçgeninde AD doğru parçası BC kenarına ait kenarortaydır ve $|AD| = V_a$ biçiminde gösterilir. Benzer şekilde AC kenarına ait kenarortay V_b ile AB kenarına ait kenarortay V_c ile gösterilir.



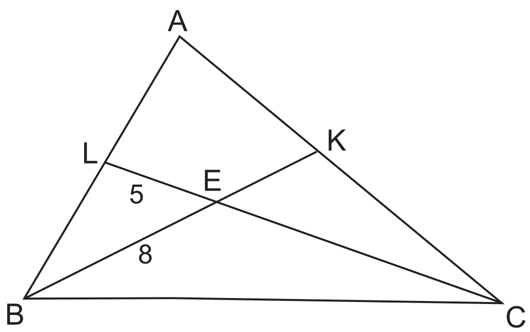
Şekildeki ABC üçgeninde D, E ve F kenar orta noktalar olmak üzere üçgenin kenarortayları üçgenin içinde bir noktada kesişir ve bu noktaya üçgenin **ağırlık merkezi** denir.

Yandaki ABC üçgeninde G ağırlık merkezi olmak üzere

$|AG| = 2|GD|$, $|BG| = 2|GE|$ ve $|CG| = 2|GF|$

olur.

ÖRNEK



E noktası ABC üçgeninin ağırlık merkezidir. $|EL| = 5$ cm ve $|BE| = 8$ cm olduğuna göre $|EK| + |EC|$ nın kaç cm olduğunu bulunuz.

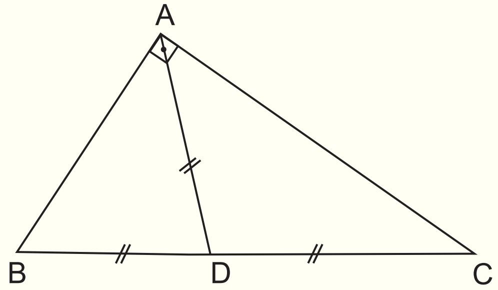
ÇÖZÜM

E noktası ABC üçgeninin ağırlık merkezi olduğundan

$|CE| = 2|LE| \Rightarrow |CE| = 2 \cdot 5$
$= 10$ cm olur.

$|BE| = 2|EK| \Rightarrow 8 = 2|EK|$
$\Rightarrow |EK| = 4$ cm olur.

Bu durumda $|EK| + |EC| = 10 + 4 = 14$ cm bulunur.



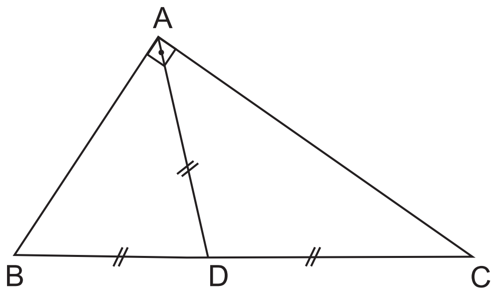
Bir dik üçgende hipotenüse ait kenarortay uzunluğu hipotenüs uzunluğunun yarısına eşittir.

ABC üçgeninde $[AB] \perp [AC]$ ve $[AD]$ kenarortay olmak üzere
$|AD| = |DB| = |DC|$ olur.

ÖRNEK

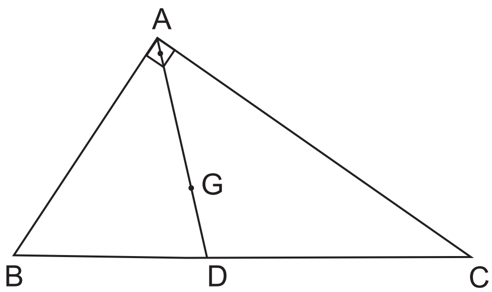
Hipotenüsünün uzunluğu 18 cm olan bir dik üçgenin hipotenüsüne ait kenarortayının uzunluğu kaç cm dir?

ÇÖZÜM



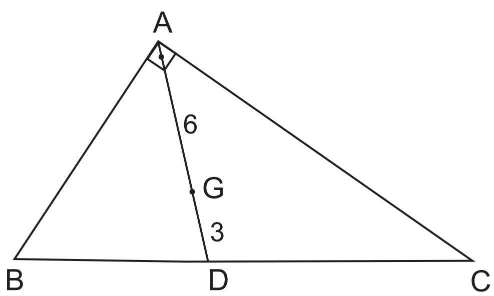
Bir dik üçgende hipotenüse ait kenarortay uzunluğu hipotenüs uzunluğunun yarısına eşit olduğundan hipotenüse ait kenarortay uzunluğu $\frac{18}{2} = 9$ cm bulunur.

ÖRNEK



ABC bir dik üçgen ve G noktası ABC üçgeninin ağırlık merkezidir.
$[AB] \perp [AC]$
$|AG| = 6$ cm
olduğuna göre $|BC|$ kaç cm dir?

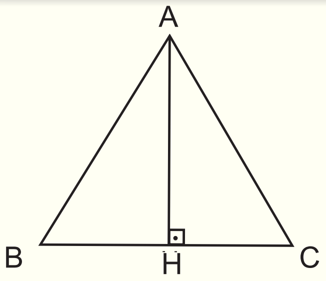
ÇÖZÜM



G noktası ABC üçgeninin ağılık merkezi olduğundan $|AG| = 2|GD|$ olur. $|AG| = 6$ cm olduğundan $|GD| = 3$ cm bulunur. Bu durumda $|AD| = 9$ cm olur.

Dik üçgende hipotenüse ait kenarortay uzunluğu hipotenüsün uzunluğunun yarısıdır. Bu durumda $|BC| = 2|AD| \Rightarrow |BC| = 2 \cdot 9 = 18$ cm bulunur.

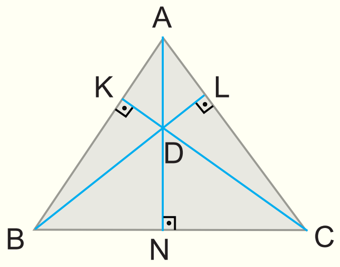
Yükseklik



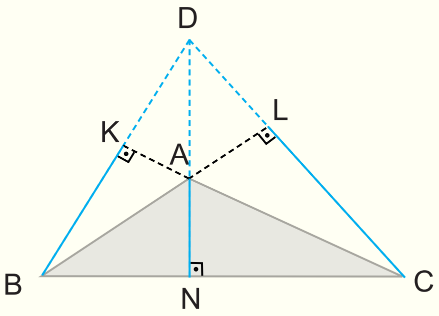
Bir üçgende herhangi bir köşeden karşısındaki kenara veya bu kenarın uzantısına çizilen dik doğru parçasına o kenara ait **yükseklik** denir.

Yandaki şekilde $[AH] \perp [BC]$ olduğundan $|AH|$ BC kenarına ait yükseklik ve h_a ile gösterilir. Benzer şekilde AC kenarına ait yükseklik h_b ve AB kenarına ait yükseklik h_c ile gösterilir.

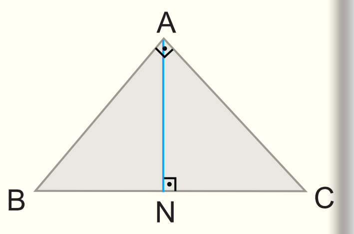
Bir üçgende yükseklikler bir noktada kesişir ve bu noktayı üçgenin **diklik merkezi** denir.



Dar açılı üçgenlerde diklik merkezi üçgenin iç bölgesindedir.

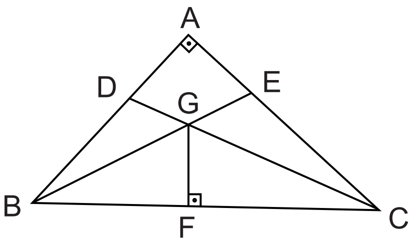


Geniş açılı üçgenlerde diklik merkezi üçgenin dış bölgesindedir.



Dik üçgenlerde diklik merkezi üçgenin dik köşesindedir.

ÖRNEK

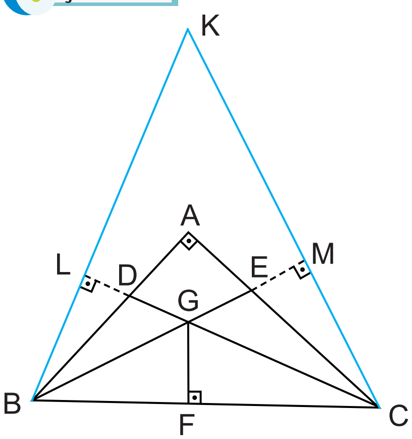


ABC bir dik üçgen $[BE] \cap [CD] = \{G\}$ ve $[GF] \perp [BC]$ olduğuna göre;

I. A noktası ABC üçgeninin diklik merkezidir.
II. A noktası BGC üçgeninin diklik merkezidir.
III. F noktası ABC üçgeninin diklik merkezidir.

ifadelerinden hangilerinin doğru olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

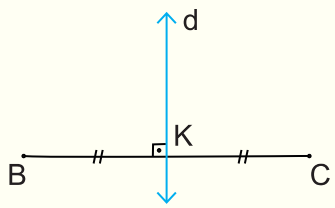


Dik üçgenlerin diklik merkezi üçgenin dik köşesi olduğundan A noktası ABC üçgeninin diklik merkezidir. Bu durumda I. doğru ve III. yanlıştır.

BGC üçgeninin $[BG]$ kenarına ait yükseklik $[CM]$ ve $[GC]$ kenarına ait yükseklik $[BL]$ olup yüksekliklerin A noktasından farklı bir K noktasında kesiştiği görülür. Bu durumda II. yanlıştır.

Bu durumda yalnız I. doğrudur.

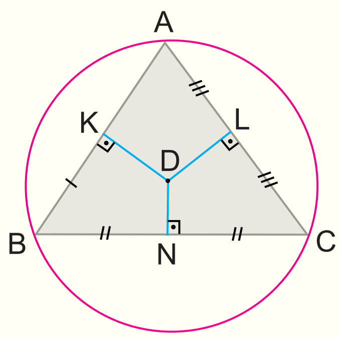
Kenar Orta Dikme



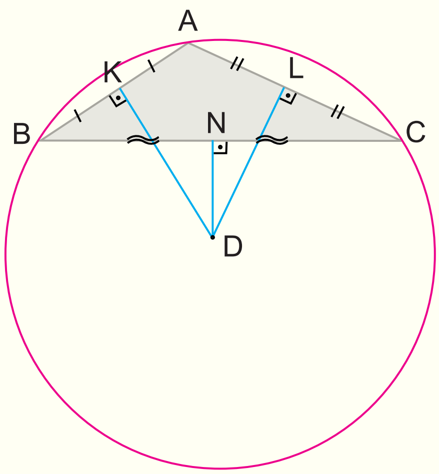
Bir doğru parçasına orta noktasında dik olan doğruya **orta dikme** denir.

Yandaki şekilde [BC] na orta noktası olan K noktasında dik olan d doğrusu [BC] nın orta dikmesidir.

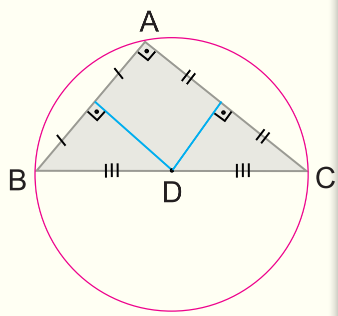
Bir üçgende bir kenarın orta noktasından geçen ve bu kenara dik olan doğruya **kenar orta dikme** denir. Bir üçgende kenar orta dikmeler bir noktada kesişir ve bu nokta üçgenin köşelerinden geçen çemberin merkezidir. Bu çembere ise üçgenin çevrel çemberi denir.



Dar açılı üçgenlerde çevrel çemberin merkezi üçgenin iç bölgesindedir.

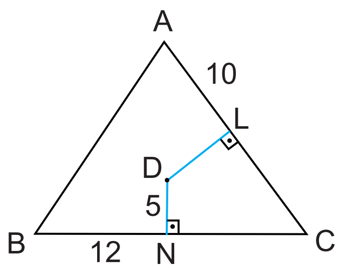


Geniş açılı üçgenlerde çevrel çemberin merkezi üçgenin dış bölgesindedir.



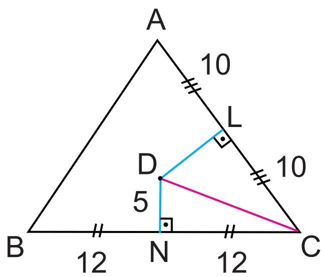
Dik üçgenlerde çevrel çemberin merkezi hipotenüsün orta noktasıdır.

ÖRNEK



D noktası ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezidir.
$[DN] \perp [BC]$, $[DL] \perp [AC]$,
$|BN| = 12$ cm, $|AL| = 10$ cm ve $|DN| = 5$ cm
olduğuna göre $|DL|$ kaç cm dir?

ÇÖZÜM



D noktası ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi olduğundan kenar orta dikmelerin kesim noktasıdır. Buna göre

$|BN| = |NC| = 12$ cm, $|AL| = |LC| = 10$ cm olur.

DNC üçgeninde Pisagor teoreminden

$|DC|^2 = |DN|^2 + |NC|^2 \Rightarrow |DC|^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow |DC|^2 = 169$ olur.

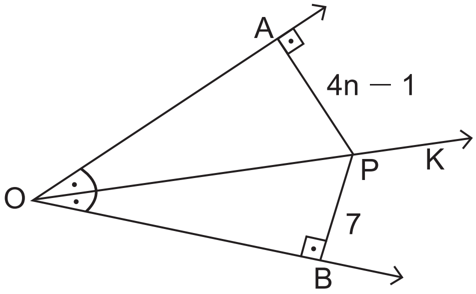
DLC üçgeninde Pisagor teoreminden

$|DC|^2 = |DL|^2 + |LC|^2 \Rightarrow 169 = |DL|^2 + 10^2$

$\Rightarrow |DL|^2 = 69 \Rightarrow |DL| = \sqrt{69}$ cm bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1.



[OK , AOB açısının açıortayıdır.

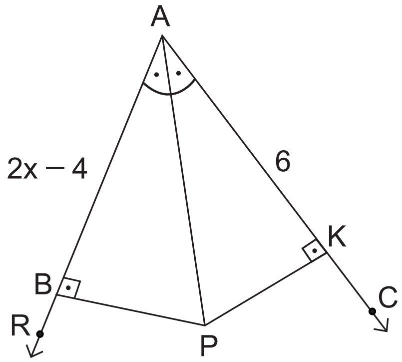
[PA] ⊥ [OA ve [PB] ⊥ [OB

|AP| = (4n − 1) cm

|PB| = 7 cm

olduğuna göre n değerini bulunuz.

2.



[AP], BAK açısının açıortayıdır.

[AR ⊥ [PB]

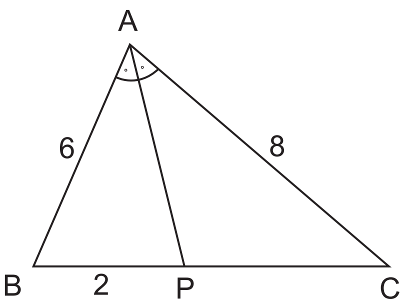
[AC ⊥ [PK]

|AB| = (2x − 4) cm

|AK| = 6 cm

olduğuna göre x değerini bulunuz.

3.



ABC üçgeninde [AP] iç açıortaydır.

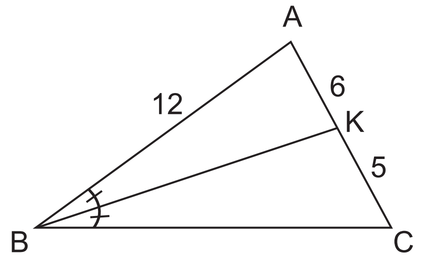
|AB| = 6 cm

|AC| = 8 cm

|BP| = 2 cm

olduğuna göre |PC| kaç cm dir?

4.



ABC bir üçgen [BK] iç açıortay

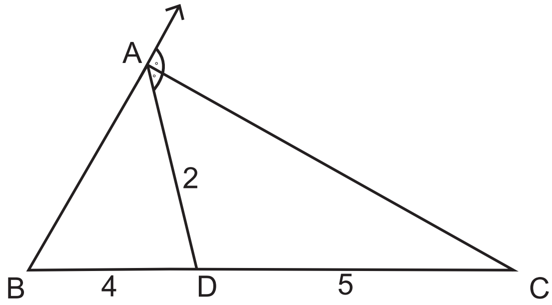
|AB| = 12 cm

|AK| = 6 cm

|KC| = 5 cm

olduğuna göre |BC| kaç cm dir?

5.



[AC], ABD üçgeninin A açısına ait dış açıortaydır.

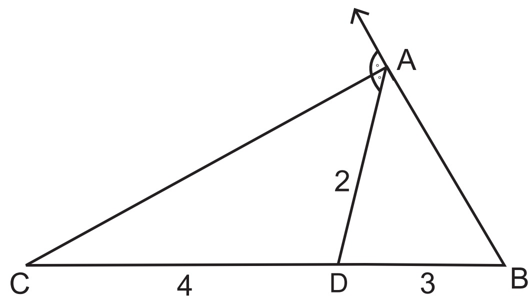
|AD| = 2 cm

|BD| = 4 cm

|DC| = 5 cm

olduğuna göre |AB| kaç cm dir?

6.



[AC], DAB üçgeninin A açısına ait dış açıortaydır.

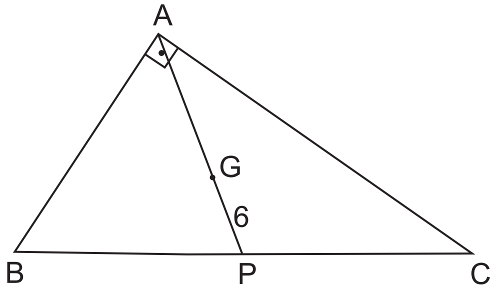
[BD] = 3 cm

[DC] = 4 cm

|AD| = 2 cm

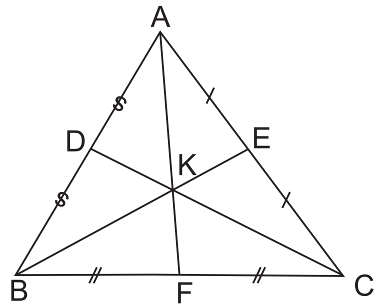
olduğuna göre |AB| kaç cm dir?

7.



G noktası ABC dik üçgenin ağırlık merkezidir. $[AB] \perp [AC]$ ve $|GP| = 6$ cm olduğuna göre $|BC|$ kaç cm dir?

8.



ABC bir üçgen,

$|AD| = |DB|$

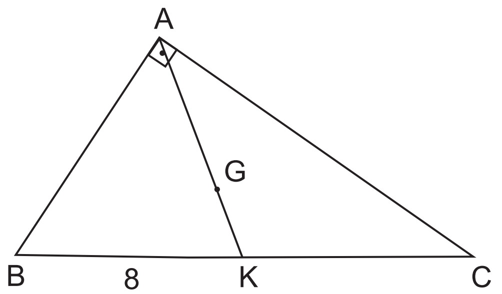
$|AE| = |EC|$

$|BF| = |FC|$

$|EK| = 2$ cm, $|DK| = 3$ cm, $|FK| = 4$ cm

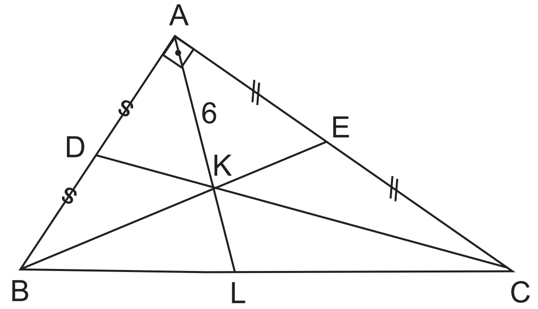
olduğuna göre $|AF| + |BE| + |CD|$ kaç cm dir?

9.



G noktası ABC dik üçgenin ağırlık merkezidir. $[AB] \perp [AC]$ ve $|BK| = 8$ cm olduğuna göre $|AG|$ kaç cm dir?

10.



ABC dik üçgen

$[AB] \perp [AC]$

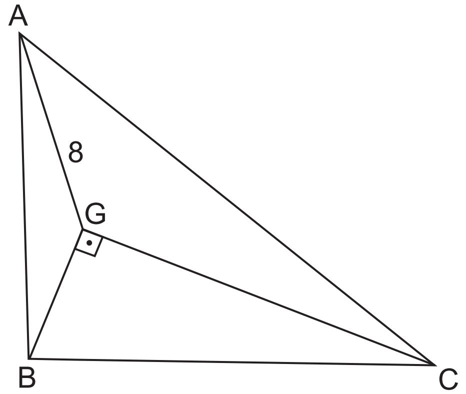
$|AK| = 6$ cm

$|AE| = |EC|$

$|BD| = |DA|$

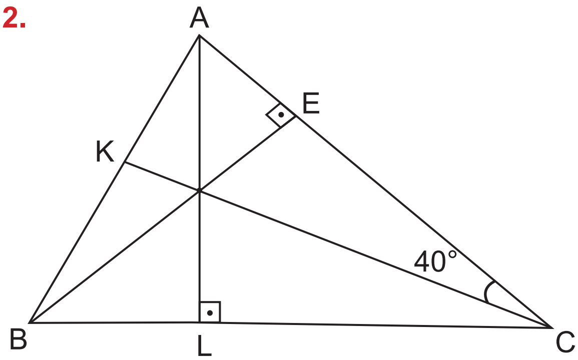
olduğuna göre $|BC|$ kaç cm dir?

11.



G noktası ABC üçgeninin ağırlık merkezidir. $[BG] \perp [GC]$ ve $|AG| = 8$ cm olduğuna göre $|BC|$ kaç cm dir?

12.



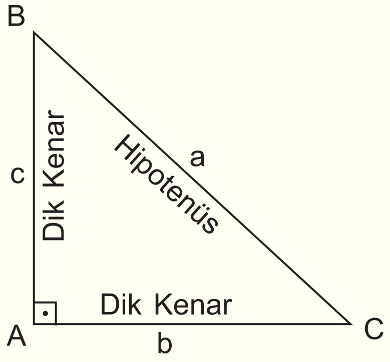
ABC üçgeninde

$[AL] \perp [BC]$ ve $[BE] \perp [AC]$

$m(\widehat{ACK}) = 40°$

olduğuna göre $m(\widehat{BAC})$ kaç derecedir?

2.4. DİK ÜÇGEN

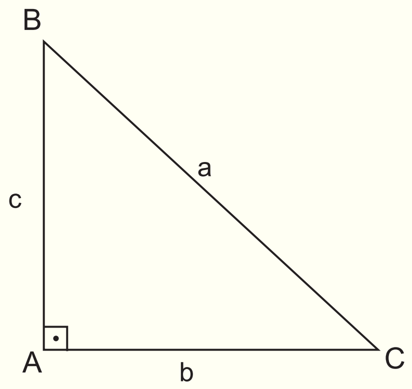


Bir açısının ölçüsü 90 derece olan üçgene **dik üçgen** denir.

Dik açının karşısındaki kenara **hipotenüs**, diğer kenarlara **dik kenar** denir. Hipotenüs dik üçgenin en uzun kenarıdır.

Yandaki ABC dik üçgeninde $[AB] \perp [AC]$ olmak üzere
$|BC| = a$ (Hipotenüs uzunluğu)
$|AC| = b$ (Dik kenar uzunluğu)
$|AB| = c$ (Dik kenar uzunluğu)
olur.

2.4.1. Dik Üçgende Pisagor Teoremi

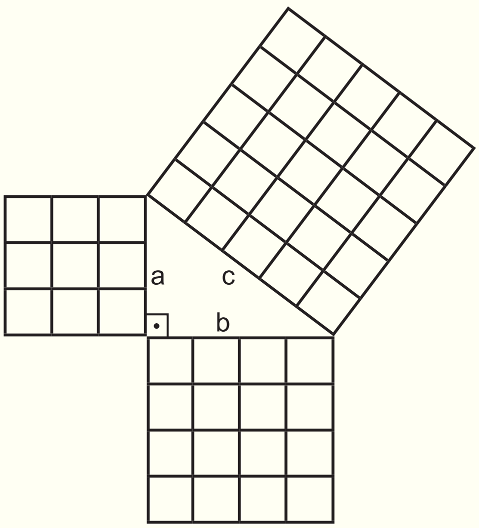


Bir dik üçgende dik kenarların uzunluklarının kareleri toplamı hipotenüs uzunluğunun karesine eşittir.

Yandaki ABC dik üçgeninde $|BC| = a$, $|AC| = b$ ve $|AB| = c$ olmak üzere $[AB] \perp [AC]$ ise

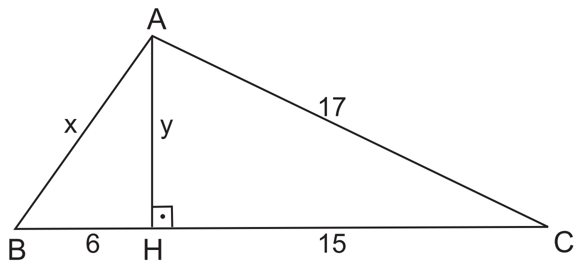
$$a^2 = b^2 + c^2$$

olur.



Yandaki modellemede, kenar uzunlukları a, b ve c olan dik üçgenin dik kenarları üzerine kurulan karelerin alanlarının toplamının hipotenüs üzerine kurulan karenin alanına eşit olduğu $a = 3$ birim, $b = 4$ birim ve $c = 5$ birim için gösterilmiştir.

ÖRNEK



ABC üçgeninde
$[AH] \perp [BC]$
$|AC| = 17$ cm
$|HC| = 15$ cm
$|BH| = 6$ cm
$|AH| = y$ cm
$|AB| = x$ cm
olduğuna göre $x + y$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

AHC dik üçgeninde
Pisagor teoremi uygulanırsa

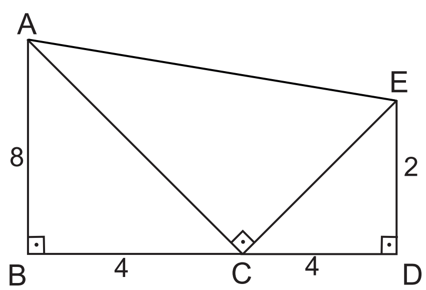
$$y^2 + 15^2 = 17^2$$
$$y^2 + 225 = 289$$
$$y^2 = 64$$
$$y = 8 \text{ olur.}$$

Bu durumda $x + y = 10 + 8 = 18$ bulunur.

ABH dik üçgeninde
Pisagor teoremi uygulanırsa

$$x^2 = 6^2 + 8^2$$
$$x^2 = 36 + 64$$
$$x^2 = 100$$
$$x = 10 \text{ olur.}$$

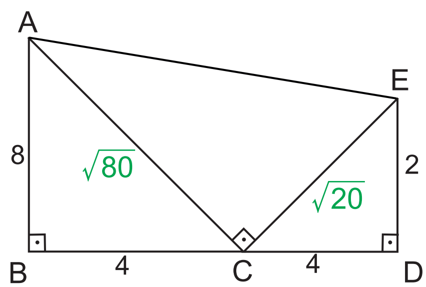
ÖRNEK



ABC, ECD ve ACE birer dik üçgendir.

$[AB] \perp [BC]$, $[AC] \perp [CE]$, $[ED] \perp [DC]$
$|ED| = 2$ cm, $|AB| = 8$ cm ve $|CD| = |BC| = 4$ cm
olduğuna göre $|AE|$ kaç cm dir?

ÇÖZÜM



ABC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

$$|AC|^2 = 8^2 + 4^2$$
$$|AC|^2 = 64 + 16$$
$$|AC|^2 = 80$$
$$|AC| = \sqrt{80} \text{ cm olur.}$$

ECD dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

$$|CE|^2 = 2^2 + 4^2$$
$$|CE|^2 = 4 + 16$$
$$|CE|^2 = 20$$
$$|CE| = \sqrt{20} \text{ cm olur.}$$

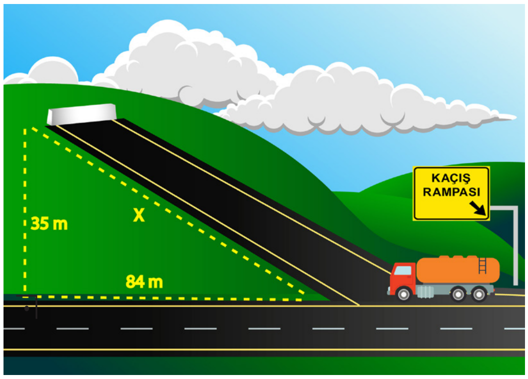
ACE dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

$$|AE|^2 = |AC|^2 + |CE|^2 \Rightarrow |AE|^2 = (\sqrt{80})^2 + (\sqrt{20})^2$$
$$\Rightarrow |AE|^2 = 80 + 20$$
$$\Rightarrow |AE|^2 = 100 \text{ cm bulunur.}$$
$$\Rightarrow |AE| = 10 \text{ cm bulunur.}$$

2. ÜNİTE: ÜÇGENLER

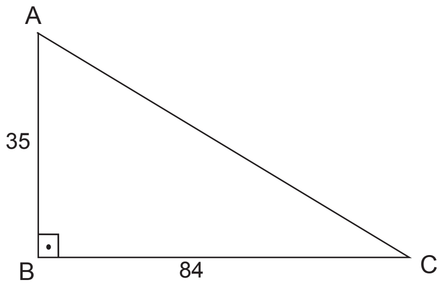
ÖRNEK

Freni patlayan bir yük kamyonu, Manisa-İzmir kara yolundaki Sabuncubeli mevkiinde yerden yüksekliği 35 metre olan ve yatayda uzunluğu 84 metre olan bir kaçış rampasına doğru yönelmiştir. Buna göre kaçış rampasının uzunluğunun kaç metredir?



Görsel 2.15

ÇÖZÜM



[AB] ⊥ [BC] ve ABC dik üçgeninde [AC] hipotenüs olur. Hipotenüs uzunluğu da kaçış rampasının uzunluğudur. Buna göre ABC üçgeninde Pisagor teoreminden

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 \Rightarrow |AC|^2 = 84^2 + 35^2$$
$$\Rightarrow |AC|^2 = 7056 + 1225$$
$$\Rightarrow |AC|^2 = 8281$$
$$\Rightarrow |AC| = 91 \text{ metre bulunur.}$$

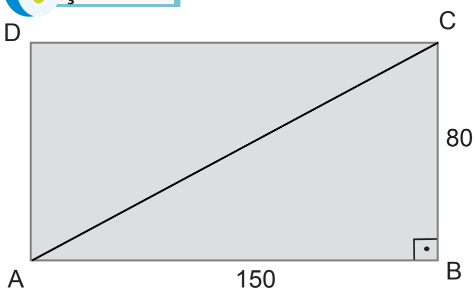
ÖRNEK

Televizyonlarda ekran boyutu inç ölçü birimi ile köşegen uzunluğu olarak belirlenir.

1 inç yaklaşık olarak 2,5 cm dir. Buna göre eni 80 cm ve boyu 150 cm olan bir televizyonun ekran boyutunun yaklaşık olarak kaç inç olduğunu bulunuz.

Görsel 2.16

ÇÖZÜM

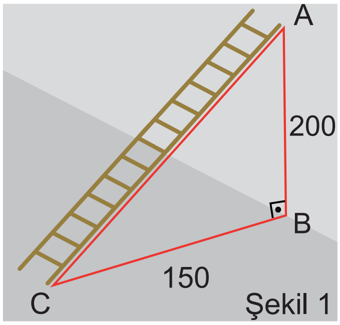


ABCD dikdörtgeni biçimindeki televizyonun [AC] köşegeni çizilirse ABC dik üçgeni elde edilir. ABC dik üçgeninde Pisagor teoreminden

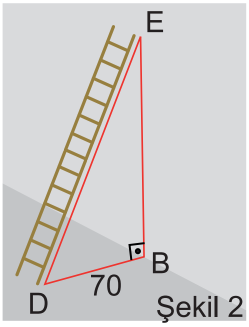
$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 \Rightarrow |AC|^2 = 150^2 + 80^2$$
$$\Rightarrow |AC|^2 = 22\,500 + 6400$$
$$\Rightarrow |AC|^2 = 28\,900$$
$$\Rightarrow |AC| = 170 \text{ cm olur.}$$

ABCD dikdörtgeni biçimindeki televizyonun ekran boyutu [AC] köşegeninin inç olarak uzunluğudur. 1 inç yaklaşık olarak 2,5 cm olduğundan televizyonun ekran boyutu yaklaşık olarak $\frac{170}{2,5} = 51$ inç bulunur.

ÖRNEK



Görsel 2.17



Görsel 2.18

Şekil 1 deki merdivenin bir ayağı duvardan 150 cm uzaklıktaki C noktasında yere, diğer ayağı ise yerden 200 cm yükseklikteki A noktasında duvara değmektedir.

Bu merdivenin bir ayağı şekil 2 deki gibi duvardan 70 cm uzaklıktaki D noktasına konursa diğer ayağının duvarda değdiği E noktasının yerden yüksekliğinin kaç cm olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

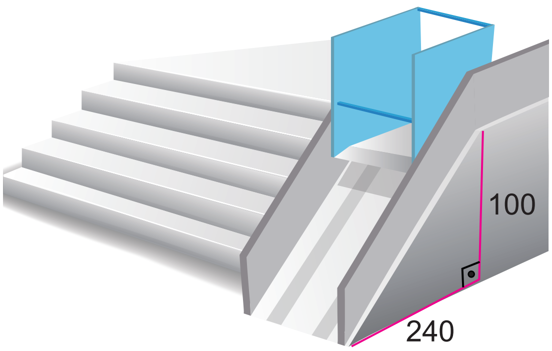
Şekil 1 de oluşan ABC dik üçgeninde Pisagor teoreminden merdivenin uzunluğu

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 \Rightarrow |AC|^2 = 200^2 + 150^2$$
$$\Rightarrow |AC|^2 = 40\,000 + 22\,500$$
$$\Rightarrow |AC|^2 = 62\,500$$
$$\Rightarrow |AC| = 250 \text{ cm olur.}$$

Şekil 2 de oluşan DBE dik üçgeninde Pisagor teoreminden E noktasının yerden yüksekliği

$$|DE|^2 = |DB|^2 + |BE|^2 \Rightarrow 250^2 = 70^2 + |BE|^2$$
$$\Rightarrow 62\,500 = 4900 + |BE|^2$$
$$\Rightarrow |BE|^2 = 62\,500 - 4900$$
$$\Rightarrow |BE|^2 = 57\,600$$
$$\Rightarrow |BE| = 240 \text{ cm bulunur.}$$

ÖRNEK



Görsel 2.19

Asansör firması sahibi hayırsever iş kadını Birsen Hanım, 'Engelsiz Okul Projesi' kapsamında engelli öğrencilerin okul merdivenlerini rahatça çıkabilmesi için bir okula asansör rampa bağışlayacaktır. Bu rampa, 100 cm yüksekliğindeki okul girişine şekildeki gibi merdiven hizasından 240 cm uzaklıktan başlayacak biçimde yapılıyor. Bu asansör saniyede 26 cm gidebildiğine göre asansöre binen bir öğrencinin merdiveni kaç saniyede çıkabileceğini bulunuz.

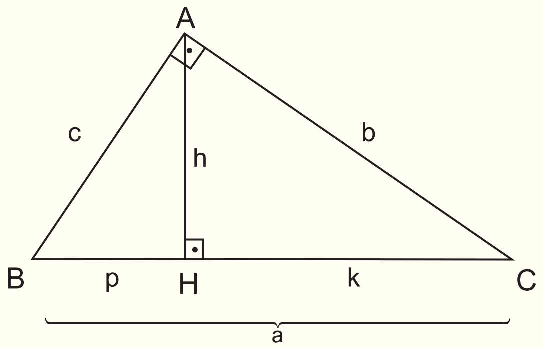
ÇÖZÜM

Rampanın uzunluğu şekilde oluşan dik üçgenin hipotenüs uzunluğudur.
Hipotenüs uzunluğu x cm olsun. Bu durumda Pisagor teoreminden

$$x^2 = 100^2 + 240^2 \Rightarrow x^2 = 10\,000 + 57\,600$$
$$\Rightarrow x^2 = 67\,600$$
$$\Rightarrow x = 260 \text{ cm bulunur.}$$

Asansöre binen bir öğrenci, asansör saniyede 26 cm gidebildiğinden 260 cm uzunluğundaki rampayı $260 : 26 = 10$ saniyede çıkar.

2.4.2. Dik Üçgende Öklid Teoremi



Bir ABC dik üçgeninde
$[AB] \perp [AC]$, $[AH] \perp [BC]$
$|AH| = h$, $|BH| = p$ ve $|HC| = k$ olsun.

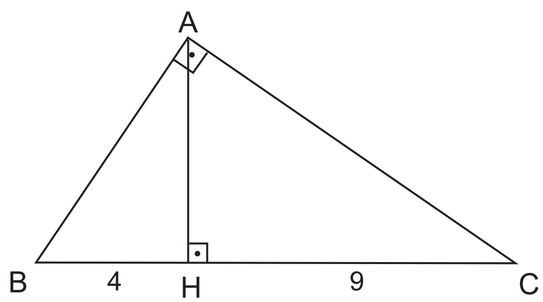
$h^2 = p \cdot k$

Bir dik üçgende hipotenüse ait yüksekliğin uzunluğunun karesi bu yüksekliğin hipotenüs üzerinde ayırdığı parçaların uzunluklarının çarpımına eşittir.

$c^2 = p \cdot a$
$b^2 = k \cdot a$

Bir dik üçgende bir dik kenarın uzunluğunun karesi, hipotenüse ait yüksekliğin hipotenüste ayırdığı parçalardan kenara yakın olanının uzunluğu ile hipotenüsün uzunluğunun çarpımına eşittir.

ÖRNEK



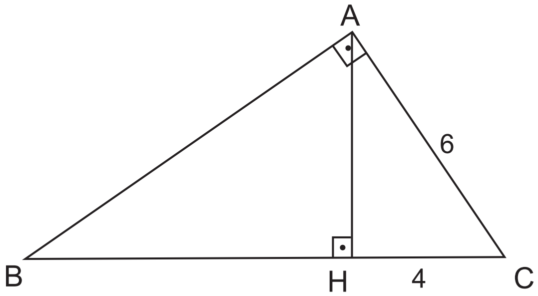
ABC dik üçgeninde
$[AB] \perp [AC]$
$[AH] \perp [BC]$
$|BH| = 4$ cm
$|HC| = 9$ cm
olduğuna göre $|AH|$ kaç cm dir?

ÇÖZÜM

ABC üçgeninde Öklid teoremi uygulanırsa

$|AH|^2 = |BH| \cdot |HC| \Rightarrow |AH|^2 = 4 \cdot 9$
$\Rightarrow |AH|^2 = 36$
$\Rightarrow |AH| = 6$ cm bulunur.

ÖRNEK



ABC dik üçgeninde

$[AB] \perp [AC]$

$[AH] \perp [BC]$

$|AC| = 6$ cm

$|HC| = 4$ cm

olduğuna göre $|BH|$ kaç cm dir?

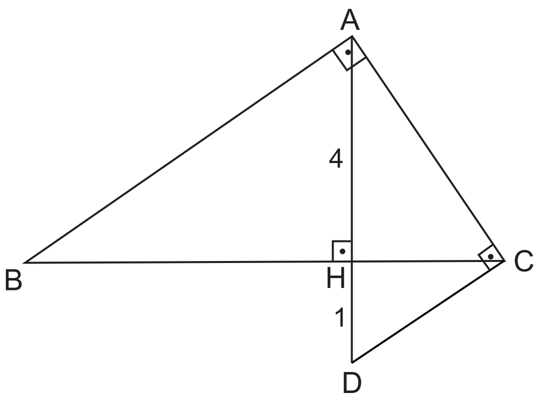
ÇÖZÜM

ABC üçgeninde Öklid teoremi uygulanırsa

$$|AC|^2 = |HC| \cdot |BC| \Rightarrow 6^2 = 4 \cdot |BC|$$
$$\Rightarrow 36 = 4 \cdot |BC|$$
$$\Rightarrow |BC| = 9 \text{ cm olur.}$$

$$|BC| = |BH| + |HC| \Rightarrow 9 = |BH| + 4$$
$$\Rightarrow 9 - 4 = |BH|$$
$$\Rightarrow |BH| = 5 \text{ cm bulunur.}$$

ÖRNEK



ABC ve ACD birer dik üçgen

$[AB] \perp [AC]$

$[AC] \perp [CD]$

$[AD] \perp [BC]$

$|AH| = 4$ cm

$|HD| = 1$ cm

olduğuna göre $|BH|$ kaç cm dir?

ÇÖZÜM

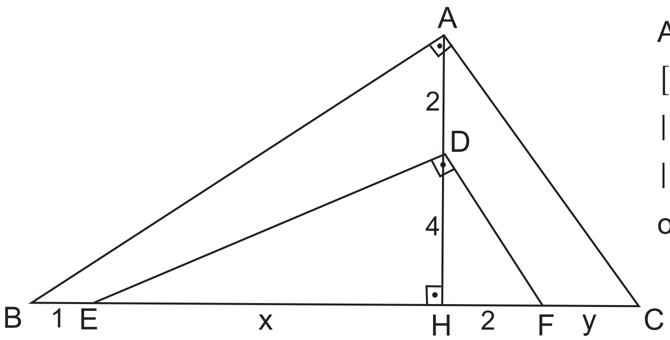
ACD üçgeninde Öklid teoremi uygulanırsa

$$|CH|^2 = |AH| \cdot |HD| \Rightarrow |CH|^2 = 4 \cdot 1$$
$$\Rightarrow |CH|^2 = 4$$
$$\Rightarrow |CH| = 2 \text{ cm olur.}$$

ABC üçgeninde Öklid teoremi uygulanırsa

$$|AH|^2 = |BH| \cdot |HC| \Rightarrow 4^2 = |BH| \cdot 2$$
$$\Rightarrow 2 \cdot |BH| = 16$$
$$\Rightarrow |BH| = 8 \text{ cm bulunur.}$$

ÖRNEK



ABC ve DEF birer dik üçgen

$[AB] \perp [AC]$, $[DE] \perp [DF]$, $[AH] \perp [BC]$

$|AD| = 2$ cm, $|DH| = 4$ cm, $|BE| = 1$ cm

$|HF| = 2$ cm, $|EH| = x$ cm, $|FC| = y$ cm

olduğuna göre x ve y değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

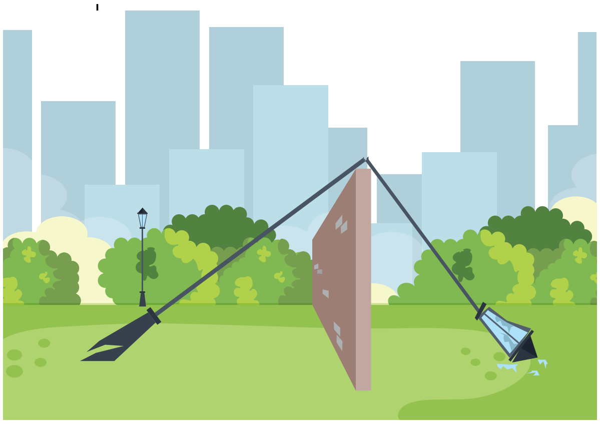
DEF üçgeninde Öklid teoremi uygulanırsa

$$|DH|^2 = |EH| \cdot |HF| \Rightarrow 16 = x \cdot 2$$
$$\Rightarrow x = 8 \text{ olur.}$$

ABC üçgeninde Öklid teoremi uygulanırsa

$$|AH|^2 = |BH| \cdot |HC| \Rightarrow 6^2 = 9 \cdot (2 + y)$$
$$\Rightarrow 36 = 18 + 9y$$
$$\Rightarrow 36 - 18 = 9y$$
$$\Rightarrow 18 = 9y$$
$$\Rightarrow y = 2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK



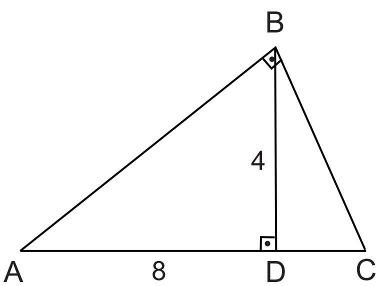
Görsel 2.20

Şekilde bir fırtınada kendisinden 8 metre uzaktaki 4 metre yüksekliğindeki duvarın üzerine devrilerek duvara değdiği yerden kırılan aydınlatma direği gösterilmiştir.

Direk kırıldıktan sonra kırılan parçaların oluşturduğu açı dik açı olacak şekilde durmaktadır.

Buna göre direğin kırılan parçasının yere değdiği noktanın duvardan kaç metre uzakta olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

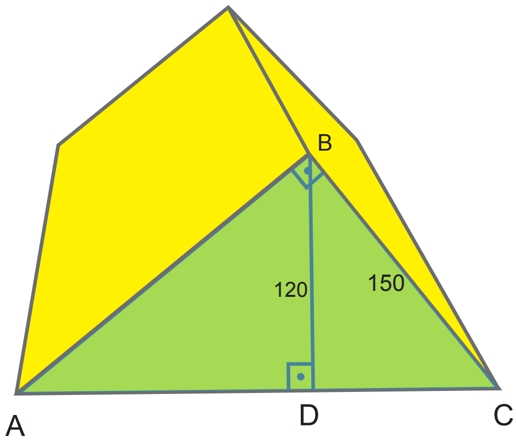


Kırılan direğin görünümü yandaki ABC üçgeni ile modellenir ve ABC üçgenine göre Öklid teoremi uygulanırsa

$$|BD|^2 = |AD| \cdot |DC| \Rightarrow 4^2 = 8 \cdot |DC|$$
$$\Rightarrow 8 \cdot |DC| = 16$$
$$\Rightarrow |DC| = 2 \text{ m olur.}$$

Bu durumda direğin kırılan parçasının zemine değdiği C noktasının duvara olan uzaklığı 2 metre bulunur.

ÖRNEK



Görsel 2.21

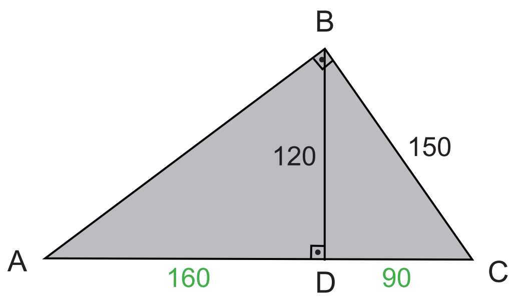
Giriş kısmı ABC dik üçgeni biçimindeki çadırda [AB], [BC] ve [BD] demir destekleri kullanılmıştır.

$[AB] \perp [BC]$, $[BD] \perp [AC]$

$|BC| = 150$ cm, $|BD| = 120$ cm

olduğuna göre çadırda kullanılan [AB] desteğinin uzunluğu kaç cm dir?

ÇÖZÜM



BDC üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
|DC|^2 + |BD|^2 = |BC|^2 &\Rightarrow |DC|^2 + 120^2 = 150^2\\
&\Rightarrow |DC|^2 + 14\,400 = 22\,500\\
&\Rightarrow |DC|^2 = 22\,500 - 14\,400\\
&\Rightarrow |DC|^2 = 8100\\
&\Rightarrow |DC| = 90 \text{ cm olur.}
\end{aligned}
$$

ABC üçgeninde Öklid teoremi uygulanırsa

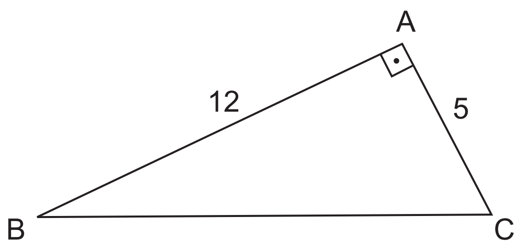
$$
\begin{aligned}
|BD|^2 = |AD| \cdot |DC| &\Rightarrow 120^2 = 90 \cdot |AD|\\
&\Rightarrow 14400 = 90 \cdot |AD|\\
&\Rightarrow |AD| = \frac{14\,400}{90}\\
&\Rightarrow |AD| = 160 \text{ cm olur.}
\end{aligned}
$$

ABD üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
|AB|^2 = |AD|^2 + |BD|^2 &\Rightarrow |AB|^2 = 120^2 + 160^2\\
&\Rightarrow |AB|^2 = 14\,400 + 25600\\
&\Rightarrow |AB|^2 = 40\,000\\
&\Rightarrow |AB| = 200 \text{ cm bulunur.}
\end{aligned}
$$

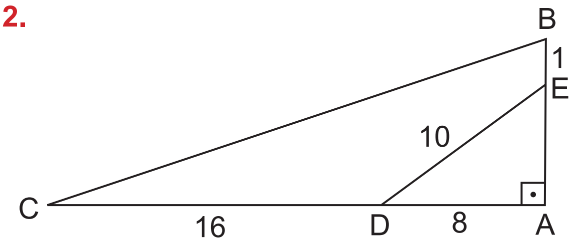
ALIŞTIRMALAR

1.



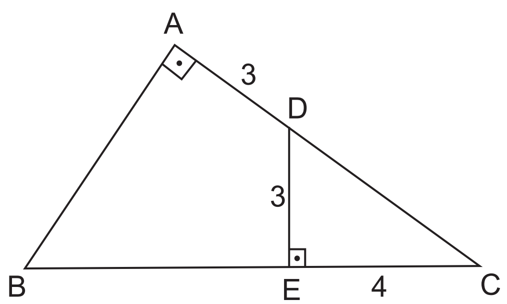
ABC dik üçgen $[AB] \perp [AC]$,
$|AB| = 12$ cm, $|AC| = 5$ cm olduğuna göre $|BC|$ kaç cm dir?

2.



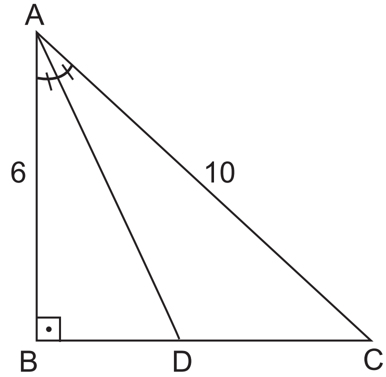
ABC dik üçgen $[AB] \perp [AC]$,
$|AD| = 8$ cm, $|DC| = 16$ cm,
$|DE| = 10$ cm ve $|EB| = 1$ cm olduğuna göre $|AE| + |BC|$ kaç cm dir?

3.



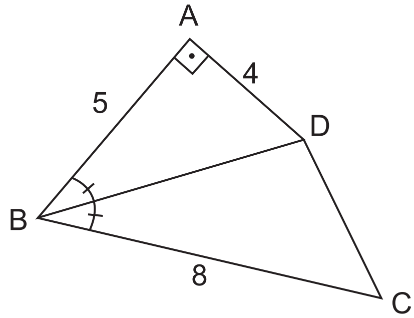
ABC bir üçgen $[AB] \perp [AC]$, $[DE] \perp [BC]$,
$|AB| = |BE|$, $|AD| = 3$ cm,
$|DE| = 3$ cm ve $|EC| = 4$ cm
olduğuna göre $|BE|$ kaç cm dir?

4.



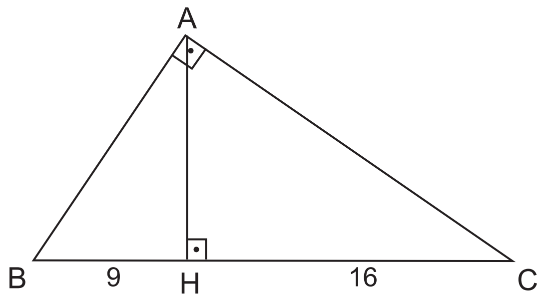
ABC dik üçgen $[AD]$ iç açıortay,
$[AB] \perp [BC]$, $|AC| = 10$ cm ve
$|AB| = 6$ cm
olduğuna göre $|BD|$ kaç cm dir?

5.



Şekilde $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{DBC})$,
$[AB] \perp [AD]$, $|AB| = 5$ cm,
$|AD| = 4$ cm ve $|BC| = 8$ cm olduğuna göre $|DC|$ kaç cm dir?

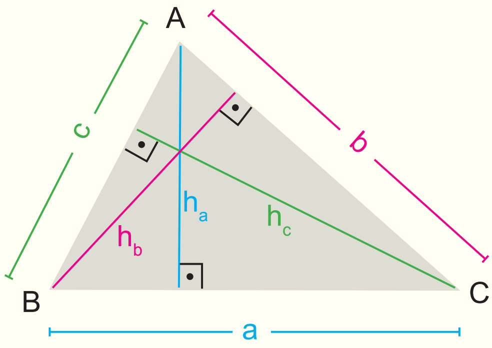
6.



ABC dik üçgen
$[AB] \perp [AC]$, $[AH] \perp [BC]$
$|BH| = 9$ cm ve $|HC| = 16$ cm
olduğuna göre $|AH|$ kaç cm dir?

2.5. ÜÇGENİN ALANI

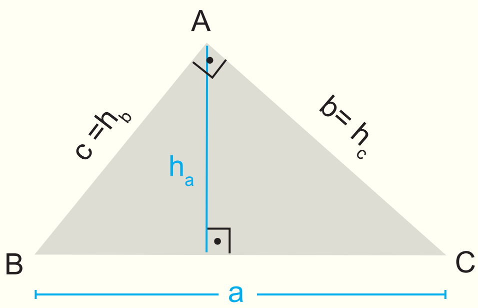
Bir üçgensel bölgenin alanı, üçgenin bir kenar uzunluğu ile o kenara ait yüksekliğinin uzunluğunun çarpımının yarısına eşittir. Bir ABC üçgeninin alanı $A(\widehat{ABC})$ biçiminde gösterilir.



Yandaki ABC dar açılı üçgensel bölgenin alanı

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

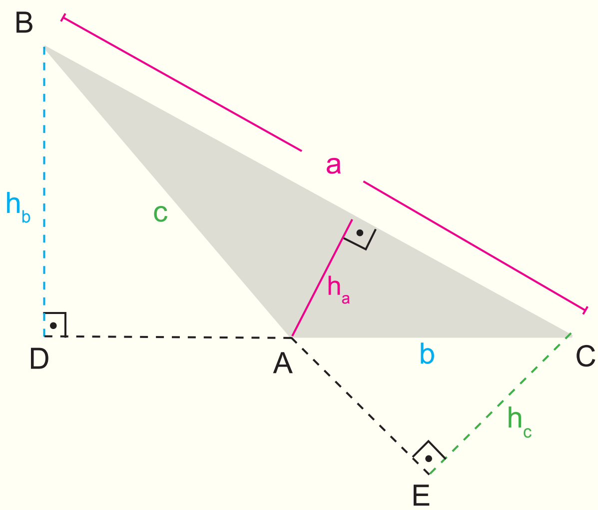
olur.



Yandaki ABC dik üçgeninde b kenarına ait yükseklik c kenarı ve c kenarına ait yükseklik b kenarı olduğundan ABC dik üçgensel bölgenin alanı dik kenarların uzunluklarının çarpımının yarısı ile de bulunabilir.

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot c}{2}$$

olur.



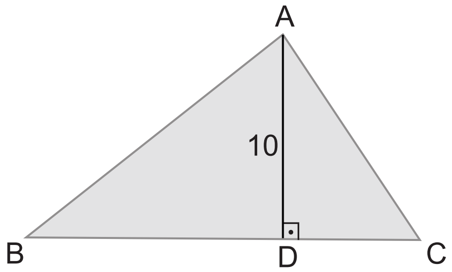
Yandaki ABC geniş açılı üçgeninde b ve c kenarlarına ait yükseklikler üçgenin dış bölgesinde kalır. ABC geniş açılı üçgensel bölgesinin alanı

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

olur.

2.5.1. Üçgenin Alanı ile İlgili Problemler

ÖRNEK



Yandaki ABC üçgeninde
$[AD] \perp [BC]$
$|AD| = 10$ cm
$|BC| = 15$ cm
olduğuna göre $A(\widehat{ABC})$ kaç cm^2 dir?

ÇÖZÜM

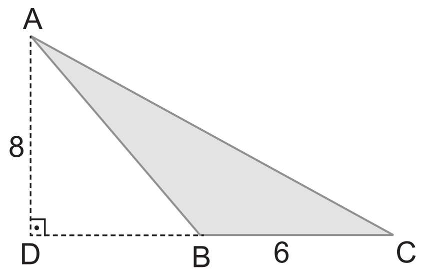
ABC üçgeninin taban uzunluğu $|DC| = 15$ cm, yüksekliğinin uzunluğu $|AD| = 10$ cm olduğundan

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{(\text{taban uzunluğu}) \times (\text{yükseklik})}{2}$$

$$= \frac{10 \cdot 15}{2}$$

$$= \frac{150}{2} = 75 \text{ cm}^2 \text{ olarak bulunur.}$$

ÖRNEK



Yandaki ABC üçgeninde
$[AD] \perp [DC]$
$|AD| = 8$ cm
$|BC| = 6$ cm
olduğuna göre $A(\widehat{ABC})$ kaç cm^2 dir?

ÇÖZÜM

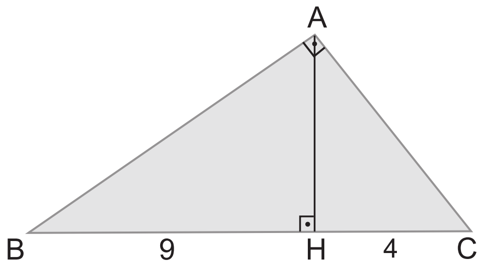
ABC üçgeninin taban uzunluğu $|BC| = 6$ cm, yüksekliğinin uzunluğu $|AD| = 8$ cm olduğundan

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{(\text{taban uzunluğu}) \times (\text{yükseklik})}{2}$$

$$= \frac{6 \cdot 8}{2}$$

$$= \frac{48}{2} = 24 \text{ cm}^2 \text{ olarak bulunur.}$$

ÖRNEK



ABC dik üçgen

$[AH] \perp [BC]$

$[AB] \perp [AC]$

$|BH| = 9$ cm

$|HC| = 4$ cm

olduğuna göre $A(\widehat{ABC})$ kaç cm^2 dir?

ÇÖZÜM

ABC üçgeninde Öklid teoremi uygulanırsa

$$|AH|^2 = |BH| \cdot |HC| \Rightarrow |AH|^2 = 4 \cdot 9$$

$$\Rightarrow |AH|^2 = 36$$

$$\Rightarrow |AH| = 6 \text{ cm olur.}$$

ABC üçgeninin alanı

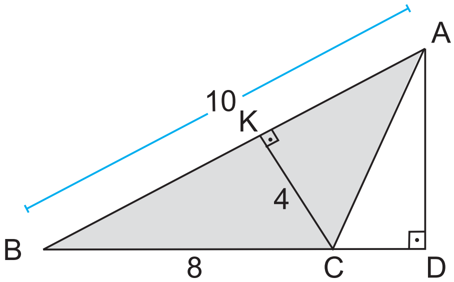
$$A(\widehat{ABC}) = \frac{|AH| \cdot |BC|}{2}$$

$$= \frac{13 \cdot 6}{2}$$

$$= \frac{78}{2}$$

$$= 39 \text{ cm}^2 \text{ olarak bulunur.}$$

ÖRNEK



ABD dik üçgen

$[AB] \perp [CK]$

$[AD] \perp [BD]$

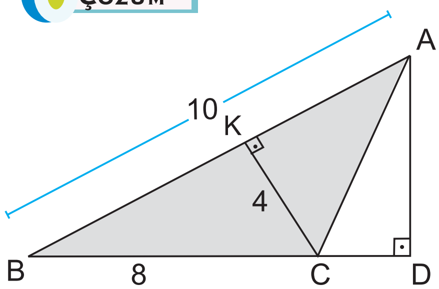
$|AB| = 10$ cm

$|CK| = 4$ cm

$|BC| = 8$ cm

olduğuna göre $|AD|$ kaç cm dir?

ÇÖZÜM

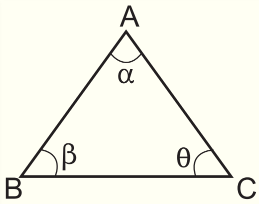


$$A(\widehat{ABC}) = \frac{|AB| \cdot |CK|}{2} = \frac{|BC| \cdot |AD|}{2} \Rightarrow \frac{10 \cdot 4}{2} = \frac{8 \cdot |AD|}{2}$$

$$\Rightarrow 20 = 4 \cdot |AD|$$

$$\Rightarrow |AD| = 5 \text{ cm bulunur.}$$

İki Kenarının Uzunluğu ve Bu İki Kenar Arasındaki Açısının Ölçüsü Verilen Üçgenin Alanı



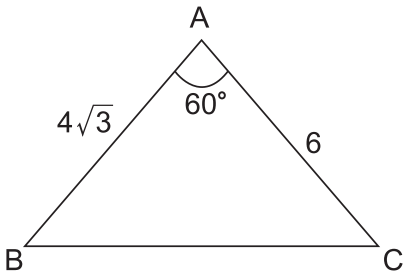
ABC üçgensel bölgesinin alanı üçgenin iki kenarının uzunluğu ile bu kenarların arasındaki açının ölçüsünün sinüs değerinin çarpımının yarısına eşittir.

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{|AB| \cdot |AC| \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{|AB| \cdot |BC| \cdot \sin\beta}{2} = \frac{|AC| \cdot |CB| \cdot \sin\theta}{2}$$

Aşağıda alan hesaplamalarında kullanılacak 30, 45, 60 ve 90 derecelik açıların sinüs değerleri verilmiştir.

$$\sin(30^\circ) = \frac{1}{2} \qquad \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin(90^\circ) = 1$$

ÖRNEK



Yandaki ABC üçgeninde

$m(\widehat{BAC}) = 60^\circ$

$|AB| = 4\sqrt{3}$ cm

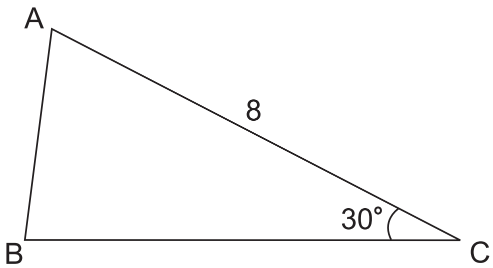
$|AC| = 6$ cm

olduğuna göre $A(\widehat{ABC})$ kaç cm^2 dir?

ÇÖZÜM

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{|AB| \cdot |AC| \cdot \sin(60^\circ)}{2} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{36}{2} = 18 \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK



Yandaki ABC üçgeninde

$m(\widehat{ACB}) = 30^\circ$

$|AC| = 8$ cm

$A(\widehat{ABC}) = 12$ cm^2

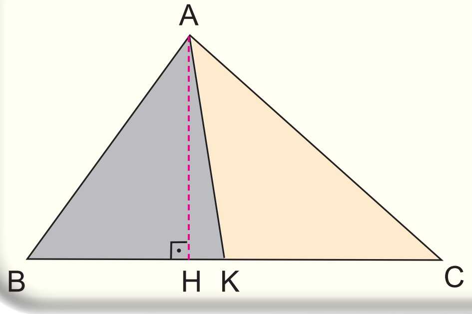
olduğuna göre $|BC|$ kaç cm dir?

ÇÖZÜM

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{|AC| \cdot |BC| \cdot \sin(30^\circ)}{2} \Rightarrow 12 = \frac{8 \cdot |BC| \cdot \frac{1}{2}}{2}$$

$$\Rightarrow 12 = 2 \cdot |BC|$$

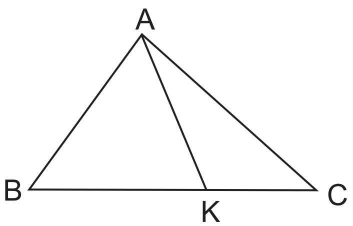
$$\Rightarrow |BC| = 6 \text{ cm bulunur.}$$



Yükseklikleri eşit olan üçgenlerin alanlarının oranı bu yüksekliklere ait taban uzunluklarının oranına eşittir.

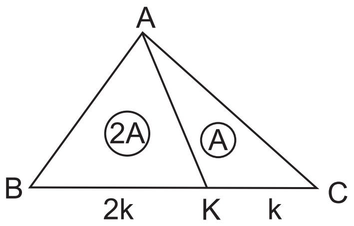
$$\frac{A(\widehat{ABK})}{A(\widehat{AKC})} = \frac{\dfrac{|BK|\cdot\cancel{|AH|}}{\cancel{2}}}{\dfrac{|KC|\cdot\cancel{|AH|}}{\cancel{2}}} = \frac{|BK|}{|KC|} \text{ olur}$$

ÖRNEK



Yandaki ABC üçgeninde $\dfrac{|BK|}{|KC|} = 2$ olduğuna göre $\dfrac{A(\widehat{ABK})}{A(\widehat{AKC})}$ oranını bulunuz.

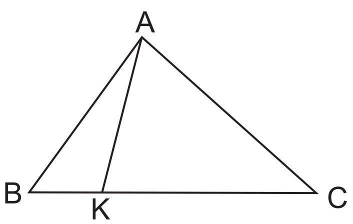
ÇÖZÜM



ABK ve AKC üçgenlerinin yükseklikleri aynı olduğundan alanları oranı taban uzunlukları oranına eşit olacaktır. Bu durumda

$$\frac{A(\widehat{ABK})}{A(\widehat{AKC})} = \frac{|BK|}{|KC|} = 2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK



Yandaki ABC üçgeninde $\dfrac{|BK|}{|KC|} = \dfrac{1}{4}$ ve

$A(\widehat{AKC}) = 24 \text{ cm}^2$ olduğuna göre $A(\widehat{ABK})$ kaç cm^2 dir?

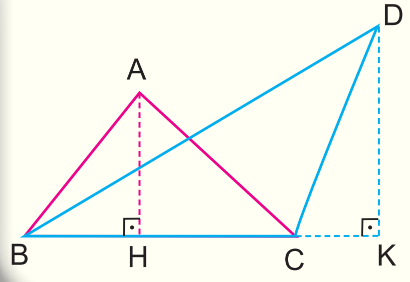
ÇÖZÜM

ABK ve AKC üçgenlerinin yükseklikleri aynı olduğundan alanları oranı taban uzunlukları oranına eşit olacaktır. Bu durumda

$$\frac{A(\widehat{ABK})}{A(\widehat{AKC})} = \frac{|BK|}{|KC|} \Rightarrow \frac{A(\widehat{ABK})}{24} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 4 \cdot A(\widehat{ABK}) = 24$$

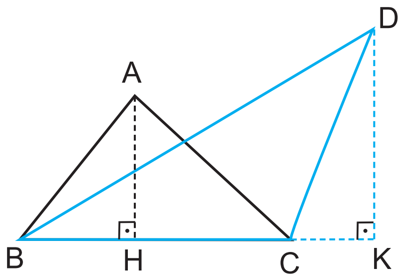
$$\Rightarrow A(\widehat{ABK}) = 6 \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$



Aynı tabana sahip olan üçgenlerin alanlarının oranı, bu tabanlara ait yüksekliklerin oranına eşittir.

$$\frac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DBC})} = \frac{\frac{\cancel{|BC|}\cdot|AH|}{\cancel{2}}}{\frac{\cancel{|BC|}\cdot|DK|}{\cancel{2}}} = \frac{|AH|}{|DK|} \text{ olur.}$$

ÖRNEK



ABC ve DBC birer üçgen $[AH]\perp[BC]$, $[DK]\perp[BK]$,

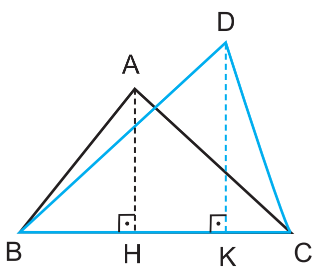
$\frac{|AH|}{|DK|} = \frac{3}{4}$ olduğuna göre $\frac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DBC})}$ oranını bulunuz.

ÇÖZÜM

ABC ve DBC üçgenlerinin tabanları aynı olduğundan alanları oranı yüksekliklerinin oranına eşit olacaktır. Bu durumda

$\frac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DBC})} = \frac{|AH|}{|DK|} \Rightarrow \frac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DBC})} = \frac{3}{4}$ bulunur.

ÖRNEK



ABC ve DBC birer üçgen $[AH]\perp[BC]$, $[DK]\perp[BC]$,

$\frac{|AH|}{|DK|} = \frac{5}{6}$ ve $A(\widehat{DBC}) = 24\ cm^2$

olduğuna göre $A(\widehat{ABC})$ kaç cm^2 dir?

ÇÖZÜM

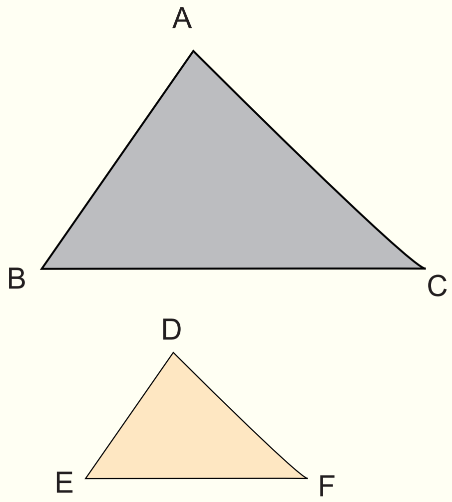
ABC ve DBC üçgenlerinin tabanları aynı olduğundan alanları oranı yüksekliklerinin oranına eşit olacaktır. Bu durumda

$$\frac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DBC})} = \frac{|AH|}{|DK|} \Rightarrow \frac{A(\widehat{ABC})}{24} = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow 6\cdot A(\widehat{ABC}) = 120$$

$$\Rightarrow A(\widehat{ABC}) = 20\ cm^2 \text{ bulunur.}$$

Eşlik ve Benzerlikte Alan



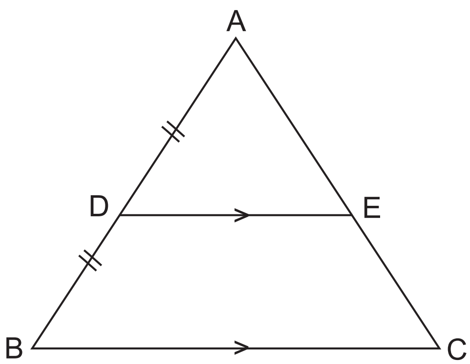
Benzer iki üçgenin alanları oranı benzerlik oranının karesine eşittir.

$\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ ve benzerlik oranı k ise

$$\frac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DEF})} = k^2 \text{ olur.}$$

Eş üçgenlerin alanları ise eşittir.

ÖRNEK



Yandaki ABC üçgeninde

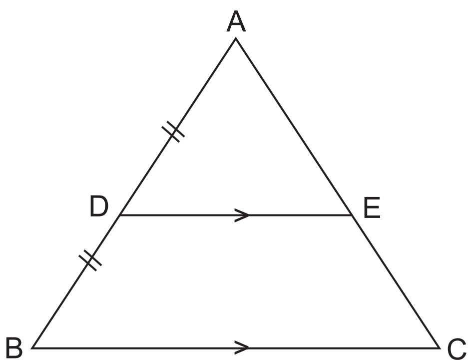
$[DE] \parallel [BC]$

$|AD| = |DB|$

$A(\widehat{ADE}) = 4 \text{ cm}^2$

olduğuna göre $A(\widehat{ABC})$ kaç cm^2 dir?

ÇÖZÜM



$\widehat{ADE} \sim \widehat{ABC}$ ve $\dfrac{|AD|}{|AB|} = \dfrac{1}{2}$ benzerlik oranıdır.

İki üçgenin alanlarının oranı benzerlik oranının karesine eşit olacağından

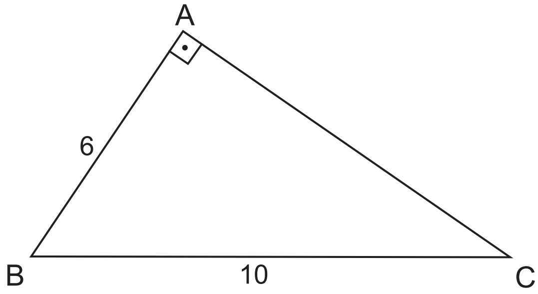
$$\frac{A(\widehat{ADE})}{A(\widehat{ABC})} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{4}{A(\widehat{ABC})} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow A(\widehat{ABC}) = 4 \cdot 4$$

$$\Rightarrow A(\widehat{ABC}) = 16 \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$

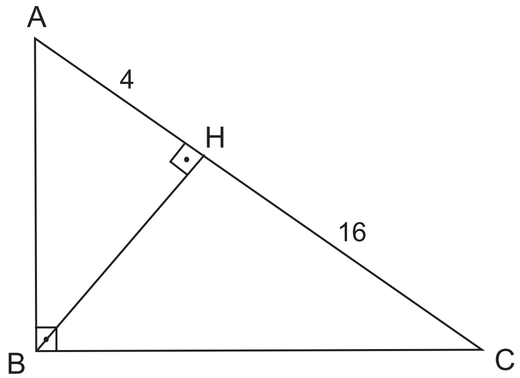
ALIŞTIRMALAR

1.



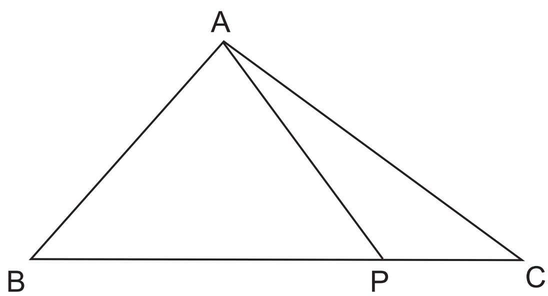
ABC üçgeninde $[AB] \perp [AC]$,
$|BC| = 10$ cm
$|AB| = 6$ cm
olduğuna göre $A(\widehat{ABC})$ kaç cm^2 dir?

2.



ABC üçgeninde $[AB] \perp [BC]$, $[AC] \perp [BH]$,
$|AH| = 4$ cm ve $|HC| = 16$ cm
olduğuna göre $A(\widehat{ABC})$ kaç cm^2 dir?

3.

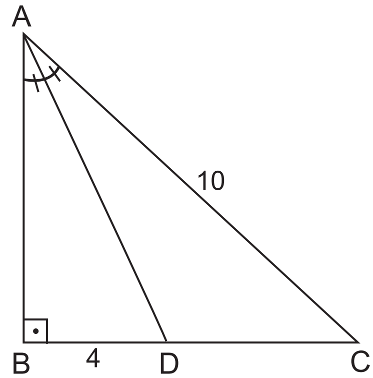


ABC üçgeninde B,P ve C noktaları doğrusaldır.

$\dfrac{|BP|}{|PC|} = 3$ ve $A(\widehat{ABC}) = 16$ cm^2

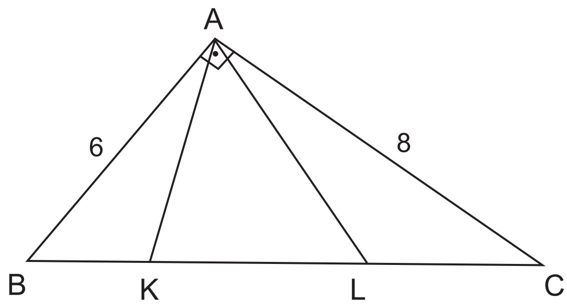
olduğuna göre $A(\widehat{ABP})$ kaç cm^2 dir?

4.



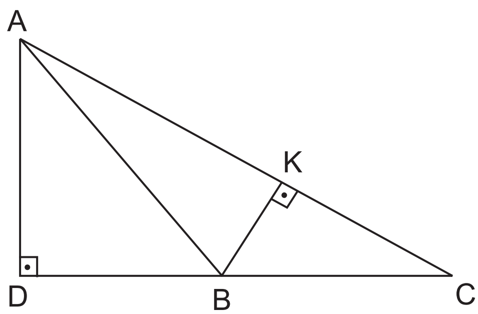
ABC üçgeninde [AD] iç açıortay
$[AB] \perp [BC]$, $|AC| = 10$ cm ve
$|BD| = 4$ cm olduğuna göre $A(\widehat{ADC})$
kaç cm^2 dir?

5.



ABC üçgeninde B, K, L ve C noktaları doğrusaldır.
$[AB] \perp [AC]$, $|AB| = 6$ cm,
$|AC| = 8$ cm ve $|BK| = |KL| = |LC|$
olduğuna göre $A(\widehat{AKL})$ kaç cm^2 dir?

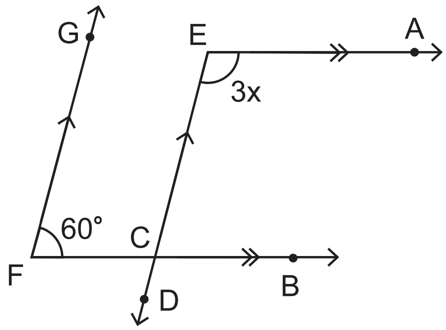
6.



ABC üçgeninde
$[AC] \perp [BK]$, $[AD] \perp [DC]$,
$|AC| = 5$ cm, $|BK| = 3$ cm, $|BC| = 4$ cm
olduğuna göre $|AD|$ kaç cm dir?

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

1.

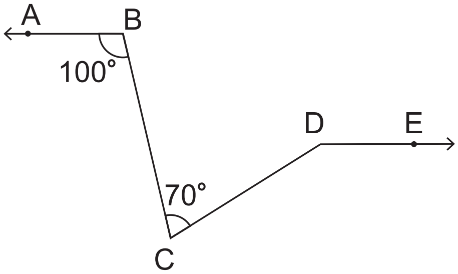


$[FG \parallel [ED$, $[EA \parallel [FB$
$m(\widehat{GFC}) = 60°$ ve $m(\widehat{AEC}) = 3x$

olduğuna göre x kaç derecedir?

A) 30 B) 40 C) 50 D) 60 E) 70

2.

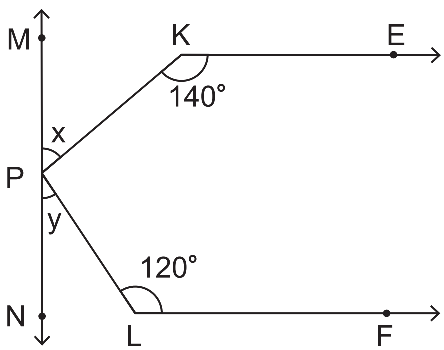


$[BA \parallel [DE$, $m(\widehat{ABC}) = 100°$ ve
$m(\widehat{BCD}) = 70°$

olduğuna göre $m(\widehat{CDE})$ kaç derecedir?

A) 35 B) 70 C) 80 D) 100 E) 150

3.

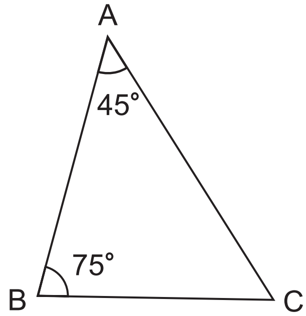


$[KE \parallel [LF$, $m(\widehat{PKE}) = 140°$
$m(\widehat{PLF}) = 120°$, $m(\widehat{MPK}) = x$ ve
$m(\widehat{NPL}) = y$

olduğuna göre $x + y$ kaç derecedir?

A) 40° B) 60° C) 80° D) 100° E) 120°

4.

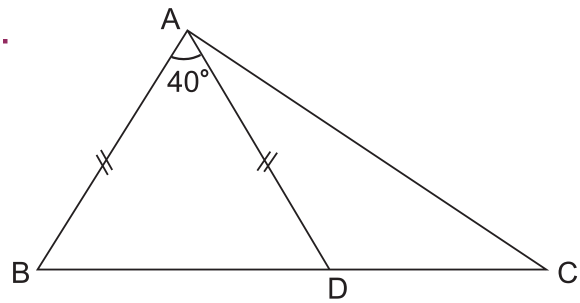


ABC üçgeninde $m(\widehat{A}) = 45°$ ve
$m(\widehat{B}) = 75°$

olduğuna göre $m(\widehat{C})$ kaç derecedir?

A) 120 B) 105 C) 75 D) 60 E) 45

5.



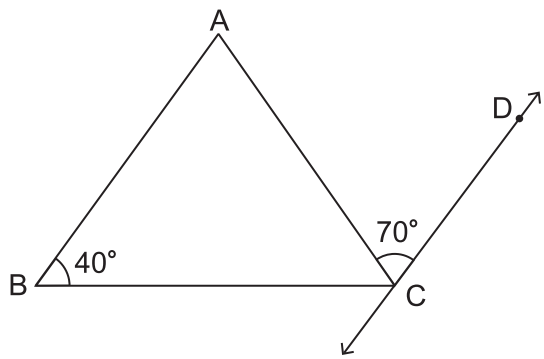
ABC üçgeninde B, D ve C noktaları doğrusaldır.

$|AB| = |AD|$, $m(\widehat{BAD}) = 40°$ ve
$m(\widehat{B}) = 2m(\widehat{C})$

olduğuna göre $\mathbf{m(\widehat{DAC})}$ kaç derecedir?

A) 35 B) 40 C) 70 D) 105 E) 140

6.

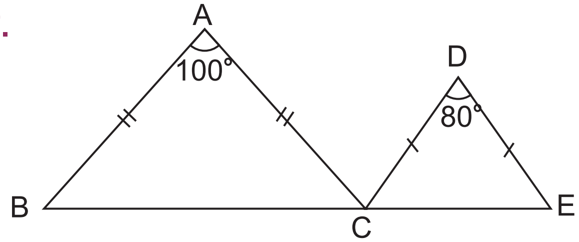


ABC bir üçgen $[AB] \parallel CD$,
$m(\widehat{B}) = 40°$ ve $m(\widehat{ACD}) = 70°$

olduğuna göre $m(\widehat{ACB})$ kaç derecedir?

A) 40 B) 70 C) 110 D) 140 E) 160

7.



ABC ve DCE birer ikizkenar üçgen B, C ve E noktaları doğrusaldır.

$|AB| = |AC|$

$|DC| = |DE|$

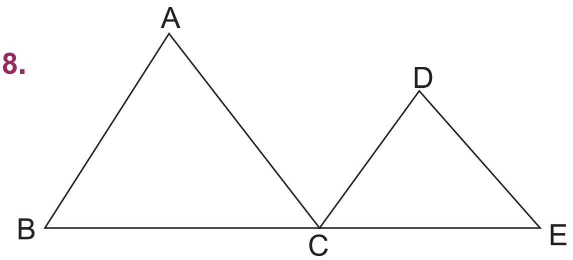
$m(\widehat{BAC}) = 100°$

$m(\widehat{CDE}) = 80°$

olduğuna göre $m(\widehat{ACD})$ kaç derecedir?

A) 100° B) 90° C) 80° D) 50° E) 40°

8.



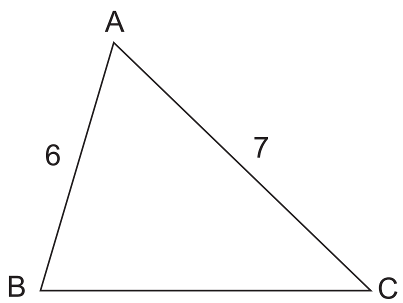
ABC ve DCE birer eşkenar üçgen B, C ve E noktaları doğrusaldır.

$|AB| = 5$ cm, $|DE| = 3$ cm

olduğuna göre $|BE|$ kaç cm dir?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 15

9.

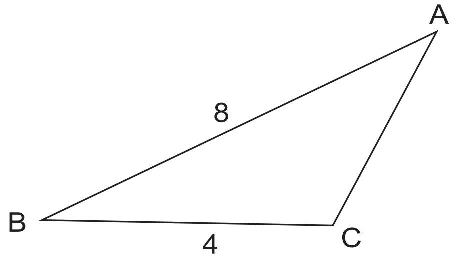


ABC bir üçgen $|AB| = 6$ cm, $|AC| = 7$ cm

olduğuna göre $|BC|$ nun cm cinsinden alabileceği kaç farklı tam sayı değeri vardır?

A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

10.

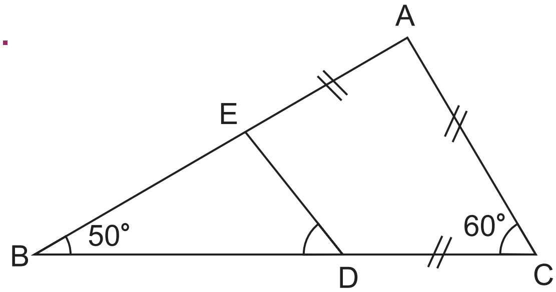


ABC bir üçgen $|AB| = 8$, $|BC| = 4$ ve $s(\widehat{B}) < s(\widehat{C})$ dir.

Buna göre $|AC|$ kaç farklı tam sayı değeri alabilir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

11.



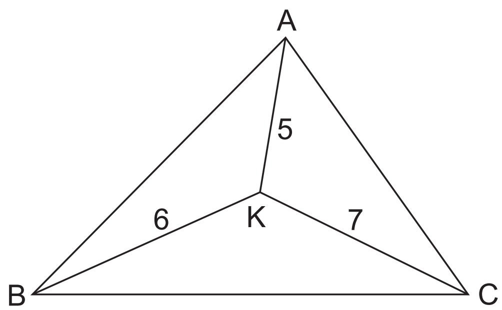
ABC bir üçgen $|AC| = |AE| = |DC|$,

$m(\widehat{ACB}) = 60°$ ve $m(\widehat{ABD}) = 50°$

olduğuna göre $m(\widehat{EDB})$ kaç derecedir?

A) 25 B) 35 C) 50 D) 70 E) 80

12.

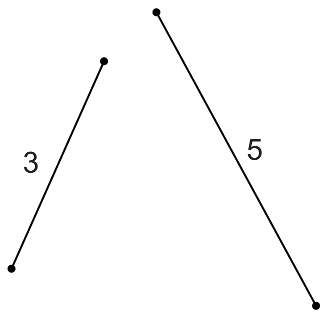


K, $\widehat{ABC}$ nin içinde bir nokta $|AK| = 5$ cm, $|BK| = 6$ cm ve $|CK| = 7$ cm

olduğuna göre $\widehat{ABC}$ nin çevre uzunluğunun alabileceği <u>en büyük</u> tam sayı değeri kaç cm dir?

A) 12 B) 13 C) 18 D) 35 E) 36

13.

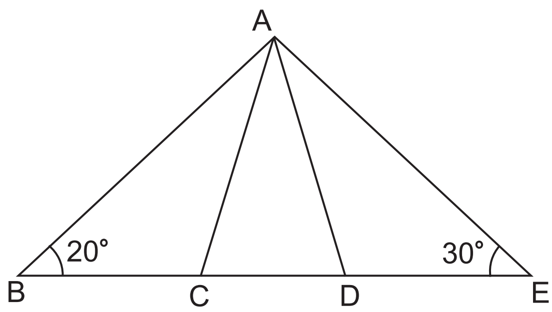


3 cm ve 5 cm uzunluğundaki iki tel, uç uca getirilerek bir üçgen oluşturulmak isteniyor.

Buna göre üçgenin en uzun kenarı tam sayı olarak <u>en fazla</u> kaç cm olabilir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

14.



ABE üçgeninde B, C, D ve E noktaları doğrusaldır.

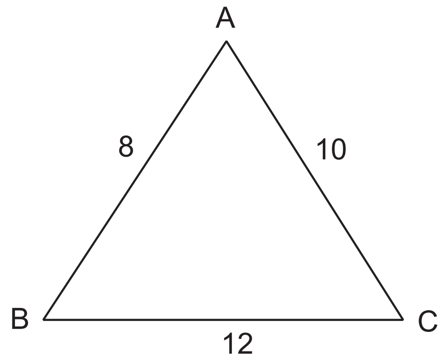
$|AC| = |CB|$, $|AD| = |DE|$

$m(\widehat{B}) = 20°$ ve $m(\widehat{E}) = 30°$

olduğuna göre $m(\widehat{CAD})$ kaç derecedir?

A) 20 B) 30 C) 40 D) 60 E) 80

15.



Şekildeki ABC üçgeninde

$|AC| = 10$ cm, $|AB| = 8$ cm ve

$|BC| = 12$ cm

olduğuna göre $\widehat{ABC}$ nin iç açılarının ölçülerinin küçükten büyüğe doğru sıralanışı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $m(\widehat{A}) < m(\widehat{B}) < m(\widehat{C})$

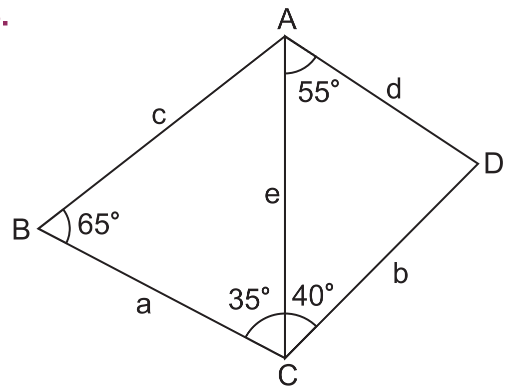
B) $m(\widehat{B}) < m(\widehat{C}) < m(\widehat{A})$

C) $m(\widehat{C}) < m(\widehat{B}) < m(\widehat{A})$

D) $m(\widehat{C}) < m(\widehat{A}) < m(\widehat{B})$

E) $m(\widehat{A}) < m(\widehat{C}) < m(\widehat{B})$

16.



Şekilde $m(\widehat{ABC}) = 65°$, $m(\widehat{BCA}) = 35°$

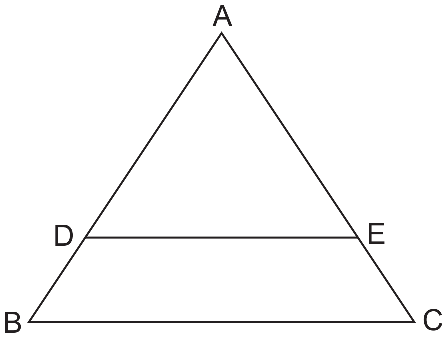
$m(\widehat{ACD}) = 40°$, $m(\widehat{DAC}) = 55°$

olduğuna göre şekildeki <u>en uzun</u> kenar aşağıdakilerden hangisidir?

A) [BC] B) [CD] C) [AB]

D) [AD] E) [AC]

17.

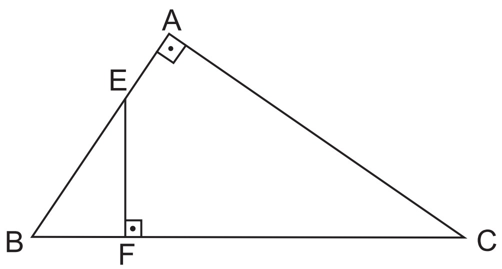


ABC üçgen $[DE] \parallel [BC]$, $|AD| = 12$ cm, $|AE| = 8$ cm ve $|DB| = 3$ cm

olduğuna göre $|EC|$ kaç cm dir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

18.

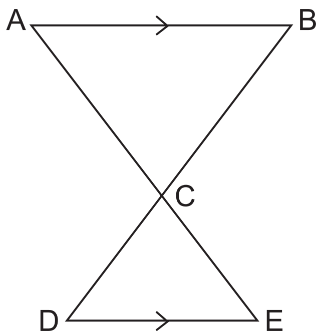


ABC dik üçgen $[AB] \perp [AC]$, $[EF] \perp [BF]$, $|EF| = 3$ cm, $|AC| = 6$ cm ve $|EB| = 4$ cm

olduğuna göre $|BC|$ kaç cm dir?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

19.

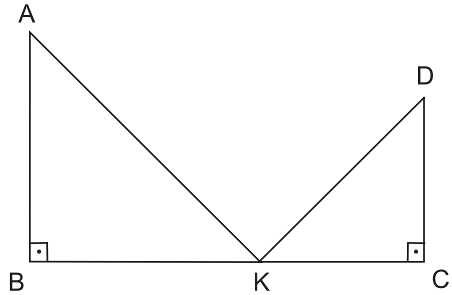


ABC ve DEC birer üçgen
$[AB] \parallel [DE]$, $[AE] \cap [BD] = \{C\}$,
$|AC| = 9$ cm, $|CE| = 6$ cm ve
$|AB| = 12$ cm

olduğuna göre $|DE|$ kaç cm dir?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

20.

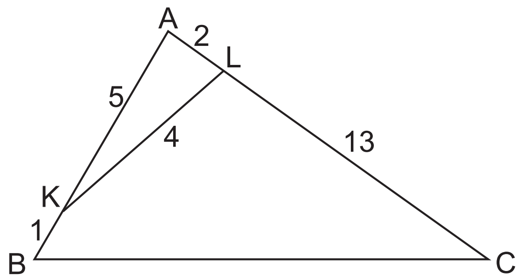


ABK ve DKC birer dik üçgen B, K ve C noktaları doğrusaldır.
$[AB] \perp [BK]$, $[DC] \perp [KC]$, $\widehat{ABK} \sim \widehat{KCD}$

olduğuna göre $m(\widehat{AKD})$ kaç derecedir?

A) 45° B) 60° C) 75° D) 90° E) 100°

21.

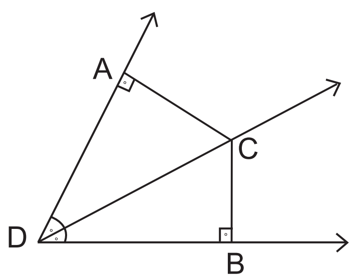


ABC üçgeninde A, K ve B; A, L ve C noktaları doğrusaldır.
$|AK| = 5$ cm, $|AL| = 2$ cm, $|KL| = 4$ cm
$|BK| = 1$ cm ve $|LC| = 13$ cm

olduğuna göre $|BC|$ kaç cm dir?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 12

22.

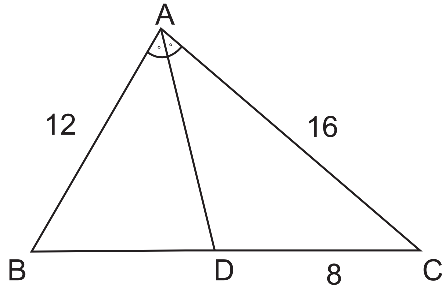


Şekilde $[DC$ açıortay
$[DA \perp [AC]$, $[DB \perp [CB]$
$|AD| = 6$ cm, $|BD| = 3x$ cm

olduğuna göre x kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

23.

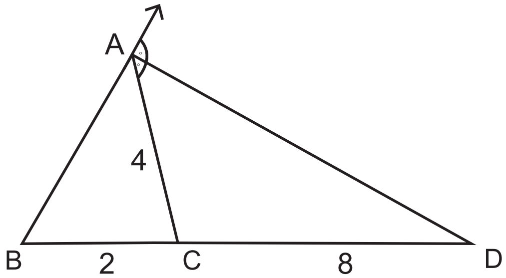


ABC üçgeninde [AD] iç açıortay,
|AB| = 12 cm, |AC| = 16 cm,
|DC| = 8 cm

olduğuna göre |BD| kaç cm dir?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

24.

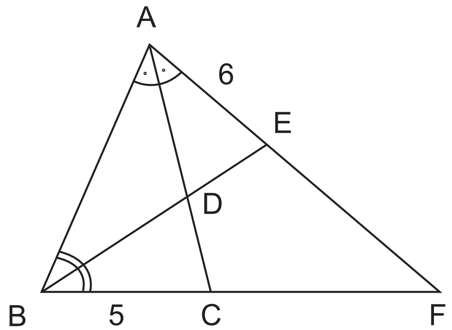


ABC üçgeninde [AD] dış açıortay,
|CD| = 8 cm, |AC| = 4 cm, |BC| = 2 cm

olduğuna göre |AB| kaç cm dir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

25.



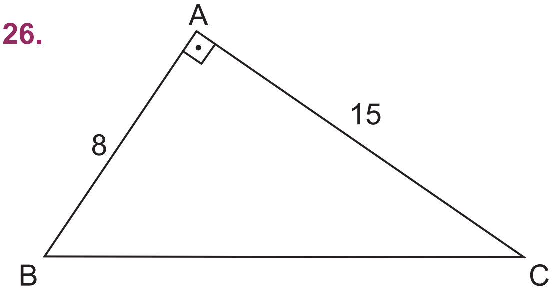
ABF üçgeninde [AC] ve [BE] iç açıortay
2|BD| = 3|DE|, |AE| = 6 cm ve
|BC| = 5 cm

olduğuna göre $\frac{|AD|}{|DC|}$ oranı

aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{9}{5}$ D) $\frac{10}{3}$ E) $\frac{11}{4}$

26.

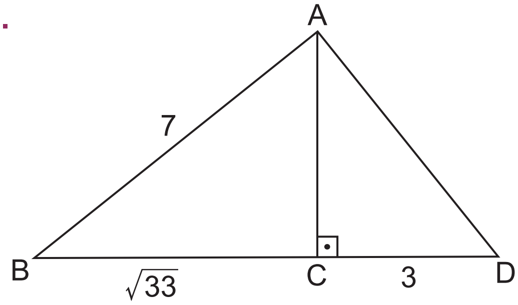


ABC dik üçgen [AB] ⊥ [AC],
|AB| = 8 cm ve |AC| = 15 cm

olduğuna göre |BC| kaç cm dir?

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

27.

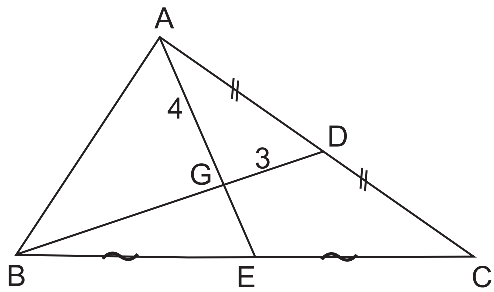


DAB üçgeninde [AC] ⊥ [BD],
|AB| = 7 cm, |BC| = $\sqrt{33}$ cm ve
|CD| = 3 cm

olduğuna göre |AD| kaç cm dir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

28.

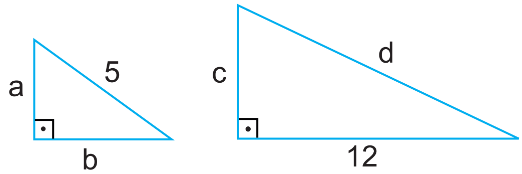


ABC üçgende
|AD| = |DC|, |BE| = |EC|,
|AG| = 4 cm ve |GD| = 3 cm

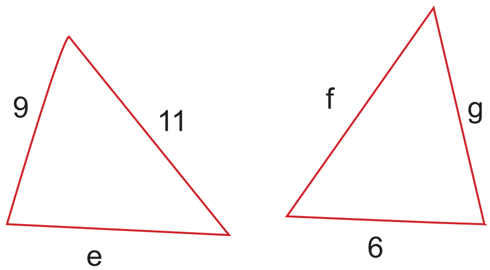
olduğuna göre |BG| + |GE| kaç cm dir?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

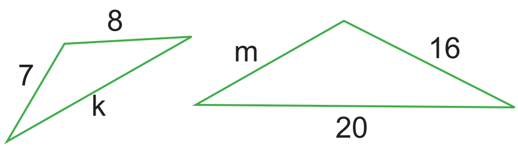
29. Aşağıdaki mavi renkli üçgenler dik üçgendir.



Aşağıdaki kırmızı renkli üçgenler eş üçgenlerdir.



Aşağıdaki yeşil renkli üçgenler benzer üçgenlerdir.



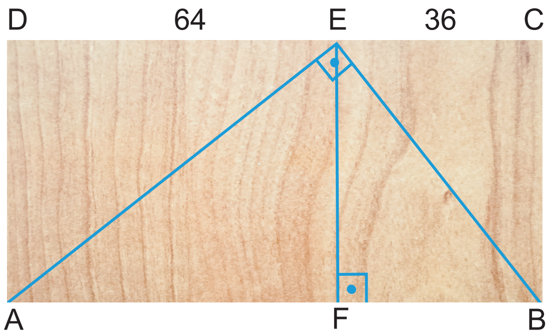
Bazı kenarlarının uzunlukları verilen 6 tane üçgenin şekil üzerinde diğer kenarlarının uzunlukları harflerle gösterilmiştir.

3	4	5	6	7
9	10	11	13	14

Buna göre tabloda verilen uzunluklar; üçgenlerin eşlik, benzerlik ve diklik şartlarını sağlayacak biçimde harflerle eşleştirildiğinde tablodaki kullanılmayan uzunluk değeri hangisi olur?

30-32. soruları aşağıdaki verilen bilgilere göre cevaplayınız.

Turan Bey, mobilya ve dekorasyon bölümünde okuyan öğrencilerine üzerinde şekildeki gibi mavi çizgiler çizdiği dikdörtgen biçiminde birer tahta veriyor.



Görsel 2.22

$[AE] \perp [EB]$, $[EF] \perp [AB]$,

$|DE| = 64$ cm ve $|EC| = 36$ cm

olarak verilmiştir.

Turan Bey, öğrencilerinden testere ile işaretli yerlerden keserek 4 tane dik üçgen parça elde etmelerini istiyor.

30. Bir öğrencinin toplam kaç cm kesim yapacağını bulunuz.

31. Caner, saniyede 4 cm kesim yapabildiğine göre Caner'in kesim işleminin tamamını kaç saniyede tamamlayacağını bulunuz.

32. Serkan'ın tüm kesim işlemi için harcadığı toplam süre 3 dakika 8 saniye olduğuna göre Serkan'ın saniyede kaç cm kesim yapabildiğini bulunuz.

CEVAP ANAHTARI

1.ÜNİTE: DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER

ALIŞTIRMALAR (s. 23-24)

1. a) $(+1)^4$ b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$ c) $\left(\frac{5}{4}\right)^3$

2. a) 8 b) $\frac{1}{81}$ c) 1 ç) 1
   d) -64 e) 625 f) -216

3. a) 2^{12} b) 3^7 c) 5^4 ç) 2^{114} d) 3^{-2} e) 2^{-9}

4. a) 10^4 b) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ c) 10^4
   ç) 6^4 d) $-\left(\frac{8}{5}\right)^2$ e) 3^{-12}

5. $\frac{5}{36}$ 6. -4 7. 1728

8. a^{-10} 9. $\frac{1}{81}$ 10. $\frac{125}{8}$

11. a) $\{1\}$ b) $\{2\}$ c) $\{-2\}$ ç) $\left\{\frac{5}{4}\right\}$

12. $\left\{-\frac{1}{6}\right\}$ 13. $\left\{\frac{-3}{2}\right\}$ 14. $\left\{\frac{7}{4}\right\}$

15. $\left\{\frac{-2}{3}\right\}$ 16. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right\}$ 17. $\{2\}$

18. $\{-11\}$ 19. $\{-2, 0\}$ 20. $\{-3, 1, 3\}$

21. $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ 22. $\{11\}$

ALIŞTIRMALAR (s. 35-36)

1. a) 2 b) 6 c) 13
   ç) 3 d) -5 e) -6

2. $x + 3$ 3. 0

4. a) $2^{\frac{3}{2}}$ b) $5^{\frac{3}{2}}$ c) $3^{-\frac{5}{2}}$
   ç) $-3^{\frac{7}{3}}$ d) $2^{\frac{4}{3}}$ e) $-7^{\frac{2}{3}}$

5. a) $1 < \sqrt{2} < 2$ b) $-5 < -\sqrt{21} < -4$
   c) $-8 < -\sqrt{50} < -7$ ç) $11 < \sqrt{130} < 12$

6. a) $11\sqrt{3}$ b) $10\sqrt{2}$ c) $16\sqrt[3]{9}$ ç) $13\sqrt[3]{3}$

7. a) 4 b) $30\sqrt{2}$ c) 10
   ç) 5 d) $2\sqrt[3]{60}$ e) 18

8. a) 2 b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt[3]{3}$ ç) -3

9. $23\sqrt{2}$ 10. 0 11. 2,8

12. $-4\sqrt[3]{4}$ 13. 3 14. 13

15. 3 16. 1 17. 25

18. $\frac{2}{7}$ 19. 6 20. $4\sqrt{3}$

21. 6 22. 6

ALIŞTIRMALAR (s. 50)

1. $\frac{16}{19}$ 2. $\frac{17}{5}$ 3. $\frac{6}{35}$

4. 4 5. 10 6. 2

7. 75 8. 5 9. 38,4

10. 4 11. 10 12. 15

ALIŞTIRMALAR (s. 63-64)

1. $4(x-3)=x$ 2. $\frac{x+3}{2}=x-2$ 3. 14

4. 3 5. 48 6. 12

7. 54 8. 60 9. 36

10. 40 11. 50 12. 80

13. %4 zarar 14. 6 15. 15

16. 5 17. 6 18. 3

19. 70 20. 28 21. 18

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME (s. 65-70)

1. A 2. B 3. C 4. B 5. E

6. D 7. C 8. C 9. A 10. E

11. A 12. A 13. D 14. C 15. B

16. A 17. D 18. E 19. C 20. A

21. C 22. D 23. E 24. A 25. D

26. A 27. E 28. D 29. C 30. A

31. D 32. B 33. A 34. E 35. C

36. A 37. D 38. B 39. D 40. C

41. C 42. I. ç II. a III. f IV. b V. d

43. I. ç II. e III. a IV. b V. d

44. 220 000 TL 45. %100

2.ÜNİTE: ÜÇGENLER

ALIŞTIRMALAR-1 (s. 92-93)

1. a) $\widehat{ABC}$ b) $\widehat{DEF}$ c) $\widehat{KLM}$

2. a) Dar açı b) Dik açı c) Geniş açı

3. 132° 4. 61° 5. 20°

6. 33° 7. 65° 8. 126°

9. 115° 10. 47° 11. 55°

12. 20° 13. 44°

ALIŞTIRMALAR-2 (s. 94-95)

1. 83° 2. 30° 3. 128°

4. 143° 5. 84° 6. 30°

7. 80° 8. 50° 9. 25°

ALIŞTIRMALAR (s. 99)

1. $m(\widehat{B}) < m(\widehat{C}) < m(\widehat{A})$ 2. $|DF| > |DE| > |EF|$

3. $|AB|$ 4. e 5. 51°

ALIŞTIRMALAR (s. 104)

1. 9
2. 23
3. 6 ve 12
4. $\frac{8}{3} < x < 6$
5. 6, 7 ve 8

ALIŞTIRMALAR (s. 123-124)

1. 6
2. 2
3. $\frac{5}{2}$
4. 6
5. $\frac{3}{2}$
6. 4
7. 2
8. $10\sqrt{2}$
9. 10
10. 30

ALIŞTIRMALAR (s. 132-133)

1. 2
2. 5
3. $\frac{8}{3}$
4. 10
5. $\frac{18}{5}$
6. $\frac{7}{2}$
7. 36
8. 27
9. $\frac{16}{3}$
10. 18
11. 8
12. 50°

ALIŞTIRMALAR (s. 142)

1. 13
2. 31
3. 6
4. 3
5. 5
6. 12

ALIŞTIRMALAR (s. 150)

1. 24
2. 80
3. 12
4. 20
5. 8
6. $\frac{15}{4}$

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME (s. 151-156)

1. B	2. E	3. C	4. D	5. A
6. B	7. B	8. B	9. A	10. B
11. B	12. D	13. C	14. E	15. C
16. A	17. B	18. C	19. C	20. D
21. E	22. B	23. A	24. E	25. C
26. B	27. D	28. B	29. 7	30. 188
31. 47	32. 1			

SÖZLÜK

A

açı : Aynı başlangıç noktasına sahip iki ışının birleşiminin oluşturduğu küme.
aralık : Sayı doğrusu üzerinde bulunan iki nokta arasındaki noktalara karşılık gelen ve bütün gerçek sayılardan oluşan alt küme.

B

bilinmeyen : Bir eşitliği sağlayan sayılara karşılık gelen sembol ya da harf.
birim : Bir niceliği ölçmek için kendi cinsinden örnek seçilen değişmez parça.

Ç

çevre : Bir çokgeni oluşturan doğru parçalarının uzunlukları toplamı.
çözüm kümesi : Bir denklemi ya da eşitsizliği sağlayan değerler kümesi.

D

değişken : Değişik sayı değerleri alabilen nicelik.
denklem : İçinde yer alan bazı niceliklere ancak uygun bir değer verildiği zaman sağlanabilen eşitlik.
derece : Bir çemberin üç yüz altmışta birine eşit olan açı birimi.
dış açı : İki doğruyu kesen bir doğrunun bu doğruların dışında kalacak biçimde yaptığı açı.
dik açı : Ölçüsü 90 derece olan açı.
: İki nokta arasındaki en kısa çizgi.
doğru : Doğru üzerinde iki nokta ile sınırlanmış parça.
doğru parçası : Aynı doğruya ait olan.
doğrusal

İ

iç açı : İki doğruyu kesen bir doğrunun bu doğruların içinde kalacak biçimde yaptığı açı.
iç ters açı : İki doğru üçüncü bir doğru tarafından kesildiğinde bu doğruların arasında ve kesen doğrunun her iki kısmında komşu olmayan açı.
ikizkenar üçgen : Yalnız iki kenarı birbirine eşit olan üçgen.

K

karekök : Karesi verilen bir sayıya eşit olan sayı.
katsayı : Bir niceliğin kaç katı alındığını gösteren sayı.
kesen : Bir şekli özellikle bir üçgenin kenarlarını kesen doğru.
komşu açılar : Tepeleri ve birer kenarları ortak olan iki açıdan her biri.
küpkök : Küpü verilen bir sayıya eşit olan sayı.

M

mutlak değer : Bir gerçek sayının sayı doğrusu üzerindeki başlangıç noktasına olan uzaklığı.

O

oran : İki büyüklük, iki nicelik arasındaki bağıntı.
orantı : En az iki oranın birbirine eşitliği.

P

paralel doğrular	: Aynı düzlem üzerinde bulunan ve kesişmeyen doğrular.
pisagor teoremi	: Bir dik üçgende hipotenüs ile dik kenarlar arasındaki bağıntıyı veren teorem.

T

ters orantı	: Değişkenlerden biri artarken diğeri azalan orantı türü.

Ü

üs	: Bir gerçek sayının kaç kez kendisi ile çarpılacağını gösteren sayı.
üslü denklem	: Bilinmeyenin üs olarak bulunduğu denklem.
üslü ifade	: Üs içeren ifadeler.

Y

yöndeş açılar	: İki paralel çizginin bir kesenle kesişmesinden oluşan ve biri içte, biri dışta olarak kesenin aynı tarafında kalan açılar.
yükseklik	: Üçgenin bir köşesinden bu köşenin karşısında bulunan kenara indirilen dik doğru parçası.

KAYNAKÇA

- Türk Dil Kurumu (2012). Türkçe Sözlük. Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.
- Türk Dil Kurumu (2012). Yazım Kılavuzu. Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.
- T.C. Millî Eğitim Bakanlığı (2020). Meslekî ve Teknik Eğitim Merkezleri Matematik Dersi 9, 10, 11 ve 12. Sınıflar Öğretim Programı.
- Hacısalihoğlu, H. H., (vd.) (2000). Matematik Terimleri Sözlüğü. Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.
- Türk Dil Kurumu Yayınları: 333, Geometri, Mustafa Kemal Atatürk
- İslam Ansiklopedisi, Cilt 35, Sayfa 355 - Cilt 41, Sayfa 442, 445
- http://nek.istanbul.edu.tr:4444/ekos/TEZ/38254.pdf
- Balcı, M. (2003). Genel Matematik (Cilt I). Ankara: Balcı Yayınları.
- Çelik, B. (2010). Temel Matematik. Bursa: Dora Basım Yayın.
- Çevik, A. S., Bozacı, E. (2009). Genel Matematik 1. Ankara: Nobel Yayınları.
- Hacısalihoğlu, H. H., Balcı, M., Gökdal, F. (1988). Temel ve Genel Matematik. Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.

GÖRSEL KAYNAKÇA

Görsel 1.1: Görsel Freepik.com web sayfasından ücretsiz olarak indirilerek (“Designed by brgfx / Freepik”, “Designed by macrovector / Freepik”) görsel tasarım uzmanı tarafından düzenlenmiştir.
Görsel 1.2: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
Görsel 1.3: https://sifiratik.gov.tr/kutuphane/gorseller
Görsel 2.1: http://web.deu.edu.tr/mate-matik/m1.html (Erişim tarihi: 07.08.2020 Erişim saati: 18.34)
Görsel 2.2: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
Görsel 2.3: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
Görsel 2.4: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
Görsel 2.5: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
Görsel 2.6: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
Görsel 2.7: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
Görsel 2.8: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
Görsel 2.9: https://istanbul.ktb.gov.tr/TR-165658/miniaturk.html (Erişim tarihi: 14.07.2020 Erişim saati: 15.45)
Görsel 2.10: https://www.eba.gov.tr/dochplayer?id=8663b299c2bdac784429dabe2813d82e3c2618c4ce001 (Erişim tarihi: 03.04.2021 (39 sayfalık slaytın 5. Sayfasındaki Thales görseli) Erişim saati: 20.10)
Görsel 2.11: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
Görsel 2.12: Görseller Freepik.com web sayfasından ücretsiz olarak indirilerek (“Designed by brgfx / Freepik”, “Designed by macrovector / Freepik”) görsel tasarım uzmanı tarafından düzenlenmiştir.
Görsel 2.13: Görseller Freepik.com web sayfasından ücretsiz olarak indirilerek (“Designed by brgfx / Freepik”, “Designed by macrovector / Freepik”) görsel tasarım uzmanı tarafından düzenlenmiştir.
Görsel 2.14: Görseller Freepik.com web sayfasından ücretsiz olarak indirilerek (“Designed by brgfx / Freepik”, “Designed by macrovector / Freepik”) görsel tasarım uzmanı tarafından düzenlenmiştir.
Görsel 2.15: Görseller Freepik.com web sayfasından ücretsiz olarak indirilerek (“Designed by brgfx / Freepik”, “Designed by macrovector / Freepik”) görsel tasarım uzmanı tarafından düzenlenmiştir.
Görsel 2.16: Görseller Freepik.com web sayfasından ücretsiz olarak indirilerek (“Designed by brgfx / Freepik”, “Designed by macrovector / Freepik”) görsel tasarım uzmanı tarafından düzenlenmiştir.
Görsel 2.17: Görseller Freepik.com web sayfasından ücretsiz olarak indirilerek (“Designed by brgfx / Freepik”, “Designed by macrovector / Freepik”) görsel tasarım uzmanı tarafından düzenlenmiştir.
Görsel 2.18: Görseller Freepik.com web sayfasından ücretsiz olarak indirilerek (“Designed by brgfx / Freepik”, “Designed by macrovector / Freepik”) görsel tasarım uzmanı tarafından düzenlenmiştir.
Görsel 2.19: Görseller Freepik.com web sayfasından ücretsiz olarak indirilerek (“Designed by brgfx / Freepik”, “Designed by macrovector / Freepik”) görsel tasarım uzmanı tarafından düzenlenmiştir.
Görsel 2.20: Görseller Freepik.com web sayfasından ücretsiz olarak indirilerek (“Designed by brgfx / Freepik”, “Designed by macrovector / Freepik”) görsel tasarım uzmanı tarafından düzenlenmiştir.
Görsel 2.21: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
Görsel 2.22: Görseller Freepik.com web sayfasından ücretsiz olarak indirilerek (“Designed by brgfx / Freepik”, “Designed by macrovector / Freepik”) görsel tasarım uzmanı tarafından düzenlenmiştir.

ÜNİTE KAPAK SAYFASINDA BULUNAN GÖRSEL KAYNAKÇALAR

Kitap kapak görseli : Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
1. Ünite kapak görseli: https://www.freepik.com sitesinden indirilerek görsel tasarım uzmanı tarafından düzenlenmiştir.
2. Ünite kapak görseli: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.

GRAFİK TASARIM UZMANI TARAFINDAN ÇİZİLEN ŞEKİL, GRAFİK VE TABLOLARIN SAYFA NUMARALARI VE SAYILARI AŞAĞIDA VERİLMİŞTİR

44 (1 grafik)	47 (2 grafik)	51 (1 tablo)	57 (1 grafik)	61 (3 şekil)	62 (3 şekil)
62 (1 grafik)	63 (1 grafik)	72 (1 şekil)	73 (4 şekil)	74 (4 şekil)	75 (7 şekil)
76 (4 şekil)	77 (5 şekil)	78 (2 şekil)	79 (1 şekil)	80 (4 şekil)	81 (4 şekil)
82 (3 şekil)	83 (2 şekil)	84 (5 şekil)	85 (2 şekil)	86 (4 şekil)	87 (4 şekil)
88 (5 şekil)	89 (5 şekil)	90 (4 şekil)	91 (1 şekil)	92 (10 şekil)	93 (6 şekil)
94 (5 şekil)	95 (3 şekil)	96 (5 şekil)	97 (4 şekil)	98 (2 şekil)	99 (5 şekil)
100 (3 şekil)	101 (4 şekil)	102 (3 şekil)	103 (1 şekil)	104 (5 şekil)	105 (4 şekil)
106 (8 şekil)	107 (8 şekil)	108 (8 şekil)	109 (3 şekil)	110 (3 şekil)	111 (6 şekil)
112 (4 şekil)	113 (4 şekil)	114 (8 şekil)	115 (4 şekil)	116 (6 şekil)	117 (2 şekil)
118 (2 şekil)	119 (2 şekil)	120 (1 şekil)	122 (1 şekil)	123 (6 şekil)	124 (4 şekil)
125 (4 şekil)	126 (4 şekil)	127 (2 şekil)	128 (3 şekil)	129 (4 şekil)	130 (6 şekil)
131 (6 şekil)	132 (6 şekil)	133 (6 şekil)	134 (3 şekil)	135 (3 şekil)	136 (2 şekil)
138 (2 şekil)	139 (2 şekil)	140 (2 şekil)	141 (1 şekil)	142 (6 şekil)	143 (3 şekil)
144 (2 şekil)	145 (3 şekil)	146 (3 şekil)	147 (4 şekil)	148 (3 şekil)	149 (4 şekil)
150 (6 şekil)	151 (6 şekil)	152 (6 şekil)	153 (4 şekil)	154 (6 şekil)	155 (6 şekil)
156 (6 şekil)	156 (1 tablo)				